

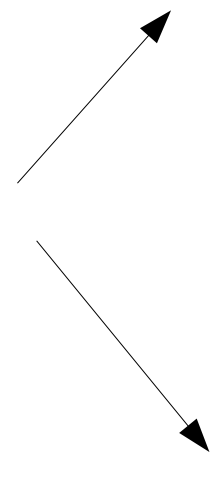
Proyección GSO e invariancia modular

La invariancia modular de la amplitud de ceros patas externas a un loop (integral funcional en el toro) motiva la proyección GSO que lleva a que el espectro de la teoría de cuerdas cerradas este libre del taquión y a la vez tenga supersimetría en espacio-tiempo

Una parte importante de lo que sigue depende de una relación general entre una integral funcional con condiciones periódicas y antiperiódicas para campos (bosónicos y fermiónicos) con la traza del hamiltoniano en el espacio de Hilbert

Esta parte ocupará una porción significativa de esta clase.

Periodicidad/antiperiodicidad en el tiempo Euclídeo

$$\text{Tr}(e^{-HT}) = \int \mathcal{D}\Phi e^{-S_E[\Phi]}$$


$\Phi(t + T) = \Phi(t)$
(bosones)

$\Phi(t + T) = -\Phi(t)$
(fermiones)

Afirmación aceptar!. Intentemos convencernos de esto

Caso “Bosonico”: partícula como campo escalar en $d=1$

$$I) \langle q_f, t_f | q_i, t_i \rangle = \int_{q(t_f)=q_f, q(t_i)=q_i} Dq e^{iS[q(t)]}$$

$$II) \langle q_f, t_f | q_i, t_i \rangle = \langle q_f | e^{-iH(t_f-t_i)} | q_i \rangle$$

$$\langle q_i | e^{-iH(t_f-t_i)} | q_i \rangle = \int_{q(t_f)=q(t_i)=q_i} Dq e^{iS[q(t)]}$$

Extensión analítica a tiempo imaginario

$$\langle q_i | e^{-H(\tau_f - \tau_i)} | q_i \rangle = \int_{q(\tau_f) = q(\tau_i) = q_i} \mathcal{D}q e^{-S_E[q]}$$

$$\text{Tr}(e^{-H\tau}) = \int_{q(t+\tau) = q(t)} \mathcal{D}q e^{-S_E[q]}$$

$$\tau > 0$$

Caso fermionico: Antiperiodicidad

Ejemplo de juguete: oscilador armonico fermionico

$$L = \psi^* i\hbar\dot{\psi} - \hbar\omega\psi^*\psi$$

$$\{\psi, \psi^*\} = 1$$

El Hilbert consta de dos estados posibles.

$$|0\rangle, \quad |1\rangle = \psi^*|0\rangle$$

La traza de cualquier operador esta bien definida y consta de dos terminos.

El espacio de Hilbert consta de solo dos niveles.

La traza de cualquier operador esta bien definida y se calcula facilmente

$$\text{Tr}\mathcal{O} = \langle 0|\mathcal{O}|0\rangle + \langle 1|\mathcal{O}|1\rangle$$

¿donde entrá lo fermionico? La representación via integral funcional requiere el uso de esas porquería llamadas “variables de Grassmann”.

Autoestados de posición en terminos de autoestados de energía

$$\psi|\eta\rangle = \eta|\eta\rangle \quad \longrightarrow \quad |\eta\rangle = |0\rangle - \eta|1\rangle$$

Necesito que eta sea una variable de Grassmann para que funcione

$$\psi|\eta\rangle = \psi|0\rangle - \psi\eta|1\rangle = \eta\psi|1\rangle = \eta|0\rangle = \eta|\eta\rangle \quad \checkmark$$

Norma de esos estados: $\langle \eta | \eta \rangle = 1 + \eta^* \eta = e^{\eta^* \eta}$

La necesidad de las variables de grassmann aparece ya en esta instancia

$$\int d\eta^* d\eta \langle \eta | \mathcal{O} | \eta \rangle e^{-\eta^* \eta} = \int d\eta^* d\eta (-\eta^* \eta \langle 0 | \mathcal{O} | 0 \rangle + \eta^* \eta \langle 1 | \mathcal{O} | 1 \rangle)$$

$$= \langle 0 | \mathcal{O} | 0 \rangle - \langle 1 | \mathcal{O} | 1 \rangle$$

Para obtener la traza, debo cambiar un signo

$$\int d\eta^* d\eta \langle -\eta | \mathcal{O} | \eta \rangle e^{-\eta^* \eta} = \langle 0 | \mathcal{O} | 0 \rangle + \langle 1 | \mathcal{O} | 1 \rangle$$

El siguiente paso es representar el miembro izquierdo por una integral funcional, cuando \mathcal{O} sea la exponencial del hamiltoniano

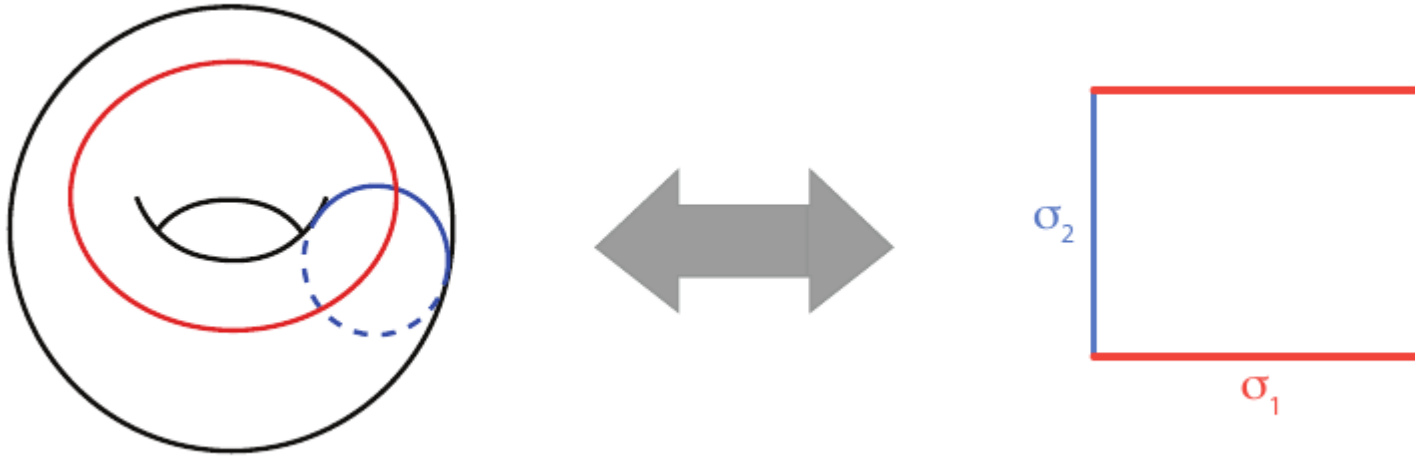
$$\mathcal{O} = e^{-HT}$$

Finalmente


$$\int d\eta^*(t) d\eta(t) \exp \left[- \int_0^T d\tau (\eta^* (-i)\dot{\eta} + \omega \eta^* \eta) \right] = \langle 0|\mathcal{O}|0\rangle + \langle 1|\mathcal{O}|1\rangle$$


donde la integral funcional esta en caminos antiperiodicos con período T

II. Periodicidades en el toro



Si σ_2 es el tiempo Euclideo, los fermiones en R/NS satisfacen condiciones de antiperiodicidad (A) en σ_2 y de Periodicidad (P) /Antiperiodicidad (A) en σ_1

R: A 
P

NS: A 
A

Las transformaciones modulares mezclan las coordenadas del toro

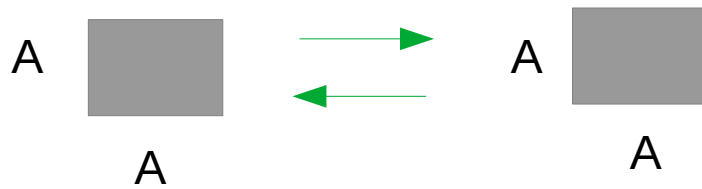
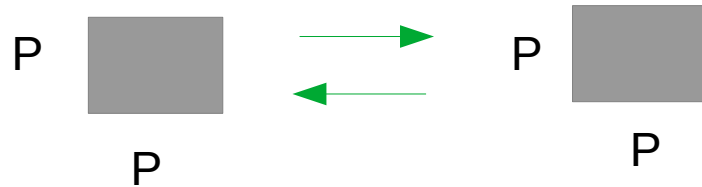
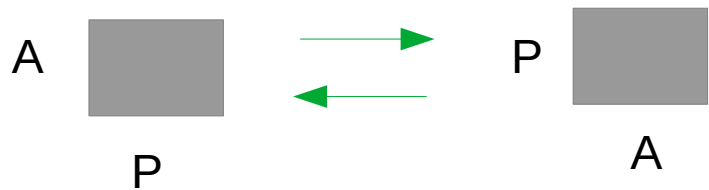
$$\tau \rightarrow -1/\tau$$

$$\begin{pmatrix} \sigma'_1 \\ \sigma'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sigma_2 \\ \sigma_1 \end{pmatrix}$$

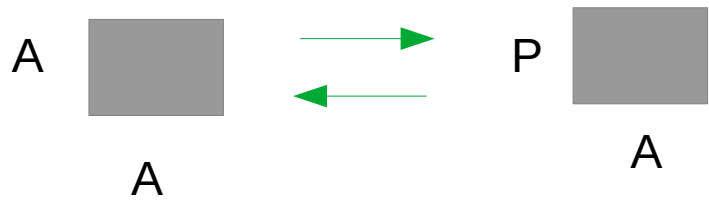
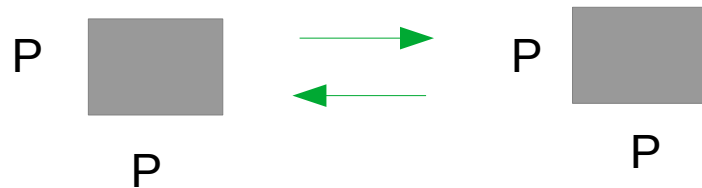
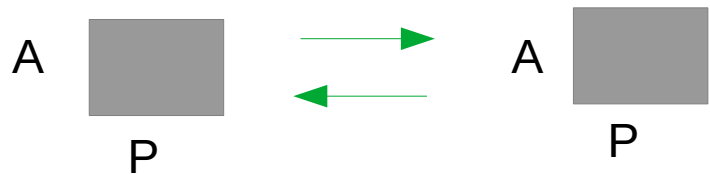
$$\tau \rightarrow \tau + 1$$

$$\begin{pmatrix} \sigma'_1 \\ \sigma'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{pmatrix}$$

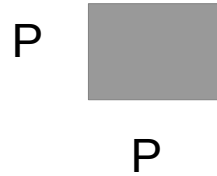
$$\tau \rightarrow -1/\tau$$



$$\tau \rightarrow \tau + 1$$



Se ve que la única estructura que se mantiene invariante ante las dos transformaciones modulares es



Salvo esa configuración que es en sí misma invariante modular, la invariancia modular requiere que las otras tres deben aparecer juntas o no estar

III Estrategia para lograr invariancia modular

Que cuentas en el lado del espacio de Hilbert daría n como resultado una integral funcional con las estructura de signos necesarias?

$$\begin{array}{c} A \\ \blacksquare \\ P \end{array} \quad \text{Tr}_{\mathbb{R}}(e^{-\tau_2 H})$$

$$\begin{array}{c} P \\ \blacksquare \\ P \end{array} \quad \text{Tr}_{\mathbb{R}}((-1)^F e^{-\tau_2 H})$$

$$\begin{array}{c} A \\ \blacksquare \\ A \end{array} \quad \text{Tr}_{\mathbb{N}S}(e^{-\tau_2 H})$$

$$\begin{array}{c} P \\ \blacksquare \\ A \end{array} \quad \text{Tr}_{\mathbb{N}S}((-1)^F e^{-\tau_2 H})$$

$(-1)^F$ número fermionico

Observación: en esta correspondencia puede haber alguna fase de proporcionalidad.

La suma de distintas estructuras da naturalmente lugar a la proyección GSO

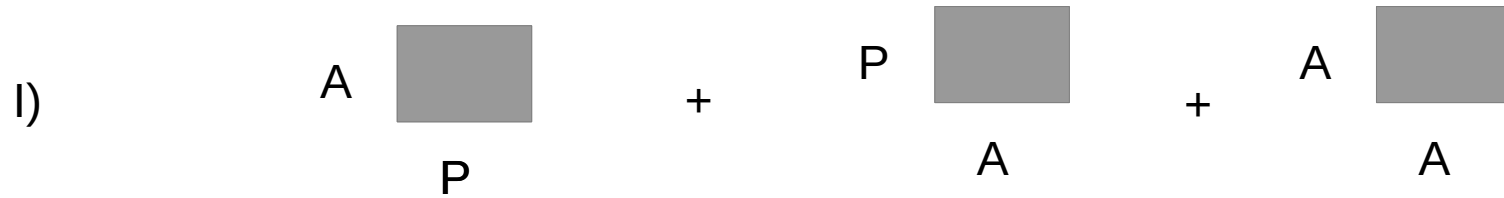
$$\frac{1}{2} \text{Tr}_{\mathbb{R}}((1 + (-1)^F) e^{-\tau_2 H})$$

$$\begin{array}{c} \text{A} \\ \square \\ \text{P} \end{array} + \begin{array}{c} \text{P} \\ \square \\ \text{P} \end{array}$$

$$\frac{1}{2} \text{Tr}_{\text{NS}}((1 + (-1)^F) e^{-\tau_2 H})$$

$$\begin{array}{c} \text{A} \\ \square \\ \text{A} \end{array} + \begin{array}{c} \text{P} \\ \square \\ \text{A} \end{array}$$

Combinaciones formalmente invariantes modulares



observación: Podría haber aquí fases relativas. Las habrá de hecho.



IV La expresión de la función de partición

En el caso de la cuerda bosónica, la manera correcta es considerar a los 26 campos bosónicos más los campos fantasmas y factores adicionales debido al volumen del grupo de simetría conforme del toro.

El caso de un bosón libre en $d=2$ es conceptualmente más simple

Función de partición de boson libre sin masa en 1+1

$$\begin{aligned}
 Z_{Boson}(\tau) &= \text{Tr} \left(q^{L_0 - \frac{c}{24}} \bar{q}^{\bar{L}_0 - \frac{c}{24}} \right) \\
 &= \underbrace{\sqrt{2}}_{\text{conv. normalization}} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} d\alpha}_{\text{int. over primaries}} \left(\underbrace{\sum_{\substack{\{\vec{k}\} \\ k_1 < k_2 < \dots}}}_{\text{hol. descendants}} q^{\frac{\alpha^2}{2} + |\vec{k}| - \frac{1}{24}} \right) \\
 &\quad \times \underbrace{\left(\sum_{\substack{\{\bar{k}\} \\ \bar{k}_1 < \bar{k}_2 < \dots}} \bar{q}^{\frac{\alpha^2}{2} + |\bar{k}| - \frac{1}{24}} \right)}_{\text{anti-hol. desc.}}
 \end{aligned}$$

$$Z_{\text{Boson}}(\tau) = \frac{1}{\sqrt{\text{Im}(\tau)}|\eta(\tau)|^2}$$

$$\eta(\tau) = q^{1/24} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n) \quad q = e^{2\pi i \tau}$$

Checkear invariancia modular

$$\eta(\tau + 1) = e^{2\pi i/24} \eta(\tau) \quad \eta(-1/\tau) = \sqrt{-i\tau} \eta(\tau)$$

$$Z_{\text{genero } 1} \sim \int d^2\tau Dh_\tau \Big|_{\text{topología del toro } \tau} DX e^{-S_{\text{poly}}[h, X]}$$

versión integral funcional

$$Z_{\text{genero } 1} \sim \text{Tr}_{\mathcal{H}}(e^{-H\text{Im}(\tau) + iP\text{Real}\tau})$$

versión traza en espacio de Hilbert

Observación: para simplificar escritura, hemos escrito antes solo la parte $\text{Im } \tau$ en la traza, sobre entendiendo que esta también la otra contribución. Esta cosa molesta de P y H tiene que ver con que una de las direcciones del toro no está perfectamente alineada con la temporal.

Función de partición de cuerdas, integrada en τ

$$Z_{\text{cuerdas}} = \int \frac{d^2\tau}{(\text{Im } \tau)^2} \left(\frac{1}{\sqrt{\text{Im } \tau}} \frac{1}{\eta(q)} \frac{1}{\bar{\eta}(\bar{q})} \right)^{24}$$



24 bosones y algo más
o 26 bosones + fantasmas

Es invariante modular

$$\eta(\tau + 1) = e^{2\pi i/24} \eta(\tau)$$

$$\eta(-1/\tau) = \sqrt{-i\tau} \eta(\tau)$$

Caso de supercuerda

Tenemos muchas mas libertades. Recordemos estas dos posibilidades

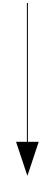
$$\text{IIA} = (\text{NS}+, \text{NS}+), (\text{NS}+, \text{R}-), (\text{R}+, \text{NS}+), (\text{R}+, \text{R}-)$$

$$\text{IIB} = (\text{NS}+, \text{NS}+), (\text{NS}+, \text{R}+), (\text{R}+, \text{NS}+), (\text{R}+, \text{R}+).$$

La búsqueda de la combinación invariante modular para sector derecho e izquierdo por separado

$$A \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} - P \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} - A \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}$$

A A P



Versión traza en Hilbert

$$Z_{\text{RNS}} = \frac{1}{2} \text{Tr}_{\text{NS}} \left[\left(1 - (-1)^F \right) q^{L_0 - \frac{1}{2}} \right] - \frac{1}{2} \text{Tr}_{\text{R}} \left(q^{L_0} \right)$$

¿Pega esta función de partición con la de las teorías IIA y IIB?

Si, si se tiene en cuenta que

$$\begin{array}{c}
 P \\
 \blacksquare \\
 P
 \end{array}
 \longleftrightarrow
 \text{Tr}_R \left((-1)^F q^{L_0} \right) = 0$$

Chequear!

Multiplicando la parte izquierda y derecha (idénticas) llegamos a:

$$Z_{\text{IIA}} = Z_{\text{NS}_+, \text{NS}_+} - Z_{\text{R}_+, \text{NS}_+} - Z_{\text{NS}_+, \text{R}_-} + Z_{\text{R}_+, \text{R}_-} .$$

$$Z_{\text{IIB}} = Z_{\text{NS}_+, \text{NS}_+} - Z_{\text{R}_+, \text{NS}_+} - Z_{\text{NS}_+, \text{R}_+} + Z_{\text{R}_+, \text{R}_+} .$$

La diferencia entre las dos teorías está en la elección del vacío del sector R. Pero resulta que la función de partición (una función de τ) es idéntica para ambos

Luego de un calculo explicito (tomar la traza en el sector fermionico y bosonico), resulta que:

$$Z_{II}(\tau, \bar{\tau}) \sim \frac{1}{\tau_2^4 |\eta(\tau)|^{24}} \left| \vartheta \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}^4 (\tau) - \vartheta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}^4 (\tau) - \vartheta \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}^4 (\tau) \right|^2$$

Funciones theta de jacobi, con dos argumentos v y τ . En la expresi3n de arriba las funciones de Jacobi estan evaluadas en $v=0$

$$\vartheta \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} (\tau, v) = e^{-i\pi a(v - \frac{b}{2})} q^{\frac{a^2}{8}} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + e^{-i\pi b} e^{2i\pi v} q^{n - \frac{1+a}{2}} \right) \left(1 + e^{+i\pi b} e^{-2i\pi v} q^{n - \frac{1-a}{2}} \right) (1 - q^n)$$

Ejercicio: Mostrar, usando identidades de las funciones de Jacobi, que esa función de partición da cero!

This beautiful formula encapsulates the full spectrum of the type IIA and type IIB superstring theories, but the outcome of the computation is actually completely trivial. The Jacobi abstruse identity (7.148) tells us that

$$Z_{II}(\tau, \bar{\tau}) = 0. \quad (7.179)$$

This result has actually a profound meaning. It indicates that both type IIA and type IIB superstring theories have a completely supersymmetric spectrum in space-time, as the contribution from the infinite number of space-time bosons compensates precisely the contribution from the infinite number of space-time fermions and the one-loop vacuum energy of the theory is exactly zero.

La amplitud (con cero patas externas) resulto ser 0 y por tanto trivialmente invariante modular.

Cuando se calculan amplitudes de scattering a 1 loop, con una cantidad no nula de patas a externas, el resultado no es cero. Aparecen expresiones similares con las funciones de Jacobi evaluadas en un v distinto de cero.

Aún así son invariantes modulares. Y se puede ver que la invariancia modular de la amplitud es válida gracias a haber elegido esta combinación de sectores:

$$\text{IIA} = (\text{NS}+, \text{NS}+), (\text{NS}+, \text{R}-), (\text{R}+, \text{NS}+), (\text{R}+, \text{R}-)$$

$$\text{IIB} = (\text{NS}+, \text{NS}+), (\text{NS}+, \text{R}+), (\text{R}+, \text{NS}+), (\text{R}+, \text{R}+).$$