Tarea 1

1. Demostrar que $\left|\left\langle\psi\middle|\phi\right\rangle\right|^2 \leq \left\langle\psi\middle|\psi\right\rangle\left\langle\phi\middle|\phi\right\rangle$ (desigualdad de Schwartz). (Ayuda: escribir $\left|\alpha\right\rangle = \left|\psi\right\rangle + \lambda\left|\phi\right\rangle$ y, para el caso $\left|\phi\right\rangle \neq 0$ elegir $\lambda = -\left\langle\phi\middle|\psi\right\rangle / \left\langle\phi\middle|\phi\right\rangle$).

2. Mostrar que si A es un operador lineal, el operador $A^\dagger$, definido como $A^\dagger\left|\psi\right\rangle = \left(\left\langle\psi\right|A\right)^\dagger$ también es un operador linear. Justificar cada paso cuidadosamente.

3. Demostrar las siguientes propiedades de operadores adjuntos. Justificar cuidadosamente cada paso.

$$A^\dagger\left(c_1\left|\psi_1\right\rangle + c_2\left|\psi_2\right\rangle\right) = c_1 A^\dagger\left|\psi_1\right\rangle + c_2 A^\dagger\left|\psi_2\right\rangle$$

$$\left\langle\phi\right|A^\dagger\left|\psi\right\rangle = \left\langle\psi\right|A\left|\phi\right\rangle^*$$

$$A^{\dagger\dagger} = A$$

$$\left(c_1 A_1 + c_2 A_2\right)^\dagger\left|\psi\right\rangle = c_1^* A_1^+\left|\psi\right\rangle + c_2^* A_2^+\left|\psi\right\rangle$$ □

$$\left(AB\right)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$$

$$\left(\left|\alpha\right\rangle\left\langle\beta\right|\right)^\dagger = \left|\beta\right\rangle\left\langle\alpha\right|$$

4. Supongamos que U es un operador lineal, y sea $\left|\psi'\right\rangle = U\left|\psi\right\rangle$. Demostrar que $\left\langle\psi'\middle|\psi'\right\rangle = \left\langle\psi\middle|\psi\right\rangle$ para todo $\left|\psi\right\rangle$ si y sólo si U es unitario.