Tarea 3

1.
Considerar el problema clásico de un electrón moviéndose en presencia de un campo magnético $(0,0,H)$ ($H > 0$) y un campo eléctrico $(E_x,E_y,0)$, donde ambos campos son constantes y uniformes. (Quizá convenga como preludio comenzar por resolver el problema sin campo eléctrico.) En todos los casos, suponer que el tiempo de relajación es infinito (ninguna colisión), y que el electrón está situado inicialmente en el plano $z=0$ y con velocidad inicial cuya componente z es zero.

a) Escribir y resolver las ecuaciones de movimiento para las direcciones x e y. La solución deberá expresarse en función de la velocidad y posición iniciales. Demostrar que esta solución consiste en un movimiento circular en un plano perpendicular al campo magnético, con frequencia angular ω_c, más un movimiento de "drift" con velocidad constante dada por $\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{E}} = c\left(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}\right)/H^2$ Mostrar que si miramos al plano xy con el campo magnético apuntando a nuestros ojos, el electrón se mueve en el sentido contrario a las agujas del reloj.

b) Mostrar que el radio de la órbita alrededor del campo magnético es $r = v/\omega_c$, donde v es la magnitud de la velocidad. Comparar con la longitud magnética $\ell_H = \sqrt{\hbar c/eH}$. Mostrar que las dos expresiones están conectadas por el principio de incertidumbre. (Hint: Si aumentamos el campo magnético, localizamos al electrón más y más. Pero para una dada velocidad, el principio de incertidumbre limita el grado de localización).

c) Agregar al problema una fuerza externa constante $\boldsymbol{F}$ y mostrar que ésta produce una velocidad de drift adicional dada por $\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{F}} = \left(-\tfrac{c}{e}\right)\left(\boldsymbol{F}\times\boldsymbol{H}\right)/H^2$

d) Suponer finalmente que el movimiento se lleva a cabo en presencia de una energía potencial $U\left(x,y\right)$ que varía poco sobre distancias comparadas con los radios de las órbitas. Usar el resultado de la parte c) para argumentar cualitativamente que si el electrón está cerca de un mínimo o un máximo de la energía potencial, adquirirá una velocidad de drift que lo hará rotar alrededor de esos extremos, pero con direcciones de rotación opuestas. (Esta es la versión clásica de la aparición de estados localizados en presencia de desorden).

2.
En clase discutimos el problema cuántico de un electrón libre sujeto a un campo magnético. Resolver el mismo problema para el caso en el cual existe una energía potencial $U(z)$ tal que $U(z) = 0$ para $0 \le z \le L_z$ y de lo contrario $U(z) = +\infty$. Proponer la misma separación de variables $\psi\left(x,y,z\right) = f\left(z\right)e^{ik_y y}u\left(x\right)$. Comenzar mostrando que $f\left(z\right)$ satisface la ecuación de Schrödinger para un pozo cuántico de profundidad infinita.

En el contexto de las soluciones a este problema discutir qué significa en la práctica tener un sistema bidimensional, cuando sabemos que obviamente el mundo es tridimensional. Para campos magnéticos accesibles en el laboratorio, estimar un orden de magnitud para L_z que garantice comportamiento bidimensional. Calcular la densidad de estados para el caso bidimensional y mostrar que consiste en una suma de funciones delta.

3.
Resolver el problema cuántico de un electrón en campos magnéticos y eléctricos cruzados, completando todos los pasos que no se mostraron en clase. Mostrar que si la solución a la ecuación de Schrödinger se escribe $\psi\left(x,y,z\right) = f\left(z\right)e^{ik_y y}u\left(x\right)$, la función $u\left(x\right)$ satisface una ecuación de oscilador harmónico con el centro de oscilación desplazado $\hbar k_y/\omega_c + v_d/\omega_c$, donde v_d es la velocidad de drift definida en el Problema 1.

Challenge problem
(*Los problemas "challenge" son opcionales, pero el estudiante que resuelva al menos 5 de estos problemas*

durante el cuatrimestre se ahorrará la obligación de generar un artículo de Wikipedia como examen final. Si el estudiante encuentra la solución del problema en la literatura, citar la fuente)

Resolver el Problema 1 pero agregando un tiempo de relajación como en el problema de Drude.