Tarea 11

1.
En clase mostramos, usando electromagnetismo puramente clásico, que la densidad de energía de una onda electromagnética plana está dada por

$$\frac{\left|\boldsymbol{S}_{\mathrm{av}}\right| n}{c}=\frac{n^2\omega_{\boldsymbol{k}}^2 A_0^2}{8\pi c^2}=\frac{\hbar\omega_{\boldsymbol{k}} n_{\boldsymbol{k}}}{V}$$

donde en la última igualdad escribimos, de manera heurística, que esa energía debe ser igualada a la energía de un fotón, multiplicada por el número de fotones y dividido por el volumen del espacio. Sostuvimos que esa igualdad justifica la expresión

$$\boldsymbol{A}=\left(\frac{4\pi c^2}{Vn^2}\right)^{1/2}\sum_{\boldsymbol{k}\lambda}\left(\frac{\hbar}{2\omega_{\boldsymbol{k}}}\right)^{1/2}\hat{\mathbf{e}}_{\boldsymbol{k}\lambda}\left[a_{\boldsymbol{k}\lambda}e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}+a_{\boldsymbol{k}\lambda}^{+}e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\right]$$

para el potencial vector como operador cuántico, donde los a y a^+ son operadores de destrucción y creación de photones. Estudiar esta aseveración de modo más detallado calculado el valor de expectación de

$$\left\langle n_{\boldsymbol{k}}\right|\boldsymbol{A}^{\dagger}\cdot\boldsymbol{A}\left|n_{\boldsymbol{k}}\right\rangle$$

para lo cual pueden usarse, por supuesto, las relaciones de conmutación para operadores de creación y destrucción bosónicos. (ver oscilador armónico).

2.
Alrededor del centro de la zona de Brillouin, las funciones de onda de la bandas cercanas al band gap pueden escribirse (omitiendo el subscripto a que utilizamos en clase:

$$\left.\begin{array}{l} S\uparrow \\ S\downarrow \end{array}\right\} \text{(banda de conducción)}$$

$$\left.\begin{array}{l} \left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right):\frac{1}{\sqrt{2}}\left(X+iY\right)\uparrow \\ \left(\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right):\frac{1}{\sqrt{2}}\left(X-iY\right)\downarrow \end{array}\right\} \text{(heavy hole band)}$$

$$\left.\begin{array}{l} \left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right):\frac{1}{\sqrt{6}}\left(X+iY\right)\downarrow-\sqrt{\frac{2}{3}}Z\uparrow \\ \left(\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right):\frac{1}{\sqrt{6}}\left(X-iY\right)\uparrow+\sqrt{\frac{2}{3}}Z\downarrow \end{array}\right\} \text{(light hole band)}$$

$$\left.\begin{array}{l} \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right):\frac{1}{\sqrt{3}}\left(X+iY\right)\downarrow+\frac{1}{\sqrt{3}}Z\uparrow \\ \left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right):\frac{1}{\sqrt{3}}\left(X-iY\right)\uparrow-\frac{1}{\sqrt{3}}Z\downarrow \end{array}\right\} \text{(Split-off band)}$$

Usando la definición

$$\begin{aligned} P&=-i\left\langle S\uparrow\right|p_x\left|X\uparrow\right\rangle=-i\left\langle S\uparrow\right|p_y\left|Y\uparrow\right\rangle=-i\left\langle S\uparrow\right|p_z\left|Z\uparrow\right\rangle \\ &=-i\left\langle S\downarrow\right|p_x\left|X\downarrow\right\rangle=-i\left\langle S\downarrow\right|p_y\left|Y\downarrow\right\rangle=-i\left\langle S\downarrow\right|p_z\left|Z\downarrow\right\rangle \end{aligned}$$

(y todos los demás elementos de matriz de p igual a cero) mostrar que

$$\left|\sum_{\alpha,J_z}\left\langle S\sigma\right|p_\alpha\left|J,J_z\right\rangle\right|^2=P^2$$

donde $\sigma=\uparrow,\downarrow$ y α = x,y,z, para todos los valores de J. (J = 3/2,1/2), como afirmamos en clase.