Tarea 9

1.

Usando la definición de los operadores de creación y aniquilación dada en clase,

$$c_p^\dagger = \sum_{\{n_i\}(i\neq p)} \left(-1\right)^{N_p} \left|\ldots, n_p = 1, \ldots\right\rangle \left\langle \ldots, n_p = 0, \ldots\right|$$

$$c_p = \sum_{\{n_i\}(i\neq p)} \left(-1\right)^{N_p} \left|\ldots, n_p = 0, \ldots\right\rangle \left\langle \ldots, n_p = 1, \ldots\right|$$

demostrar las relaciones de anticonmutación

$$\left\{c_p^\dagger, c_q^\dagger\right\} = 0$$

$$\left\{c_p, c_q\right\} = 0$$

2.

Considerar una interacción entre pares de partículas, de la forma

$$\hat{V} = \frac{1}{2}\sum_{i,j} V\left(\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j\right)$$

Esta podría ser, por ejemplo, la repulsión Coulombiana entre electrones.

a) Mostrar que el elemento de matriz de esta interacción entre dos determinantes de Slater es una combinación de elementos de términos de la forma

$$V_{\alpha\beta\lambda\mu} = \int d\boldsymbol{r}_1\, d\boldsymbol{r}_2 \varphi_\alpha^*\left(\boldsymbol{r}_1\right)\varphi_\beta^*\left(\boldsymbol{r}_2\right) V\left(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2\right)\varphi_\lambda\left(\boldsymbol{r}_2\right)\varphi_\mu\left(\boldsymbol{r}_1\right)$$

suponiendo que todos los demás estados en el determinante son los mismos. De lo contrario el elemento de matriz es cero. Mostrar que para el caso particular en que $V\left(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2\right) = V$, donde *V* es una constante,

$$V_{\alpha\beta\lambda\mu} = V\delta_{\alpha\mu}\delta_{\beta\lambda}$$

b) La expresión para $\hat{V}$ en el formalismo de segunda cuantización puede obtenerse usando el mismo método que en las notas de clases para operadores de un electrón, pero el cálculo es largo y engorroso debido a la complicada contabilidad de factores de (-1). Sin embargo, en el caso de la interacción constante uno sabe que la contribución total de $\hat{V}$ debe ser $VN\left(N-1\right)/2$ Mostrar que este resultado puede obtenerse si escribimos

$$\hat{V} = \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta,\lambda,\mu} V_{\alpha\beta\lambda\mu} c_\alpha^\dagger c_\beta^\dagger c_\lambda c_\mu$$

Challenge problem

Mostrar que si la base de estados de un electrón se elige como el conjunto de ondas planas con vector de onda ***k***, el hamiltoniano para la interacción de a pares puede escribirse como

$$\hat{V} = \frac{1}{2}\sum_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}',\boldsymbol{q}} V_{\boldsymbol{q}} c_{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{q}}^\dagger c_{\boldsymbol{k}'+\boldsymbol{q}}^\dagger c_{\boldsymbol{k}'} c_{\boldsymbol{k}}$$

con

$$V_{\boldsymbol{q}} = \frac{1}{V}\int e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}} V\left(\boldsymbol{r}\right) d\boldsymbol{r}$$

donde *V* es el volumen que contiene a las ondas planas. Interpretar esta expresión en términos de conservación de la cantidad de movimiento.