Guia 3: Cuantización de cuerdas abiertas y cerradas.

1. Considere las coordenadas $X^{\pm} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(X^0 \pm X^1)$. A partir de los vinculos de Virasoro $(\dot{X}^2 \pm X'^2) = 0$ escritas en el gauge del cono de luz $X^+(\sigma,\tau) = x^+ + p^+\tau$, deduzca los modos de oscilación de los modos X^- en términos de los modos de oscilación de *las coordenadas transversas*, es decir, las coordenadas X^i con $i = 2...D-1$ (denotadas tambien con un indice latino mayuscula que corre de 1 a $D-2$)

2. En el gauge del cono de luz, se pierde la covarianza explícita de la teoría y esto genera una anomalía a nivel cuántico que solo desaparece bajo ciertas condiciones.

   (a) Luego de un largo y engorroso calculo puede mostrarse la siguiente relación para el conmutador de algunos generadores de Lorentz

   $$[M^{-I}, M^{-K}] = \frac{-1}{(p_+)^2}\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha^I_{-m}\alpha^K_m - \alpha^K_{-m}\alpha^J_m)\Delta_{(m,D)}$$

   siendo $\Delta_{m,D} \equiv m[1 - \frac{1}{24}(D-2)] + \frac{1}{m}[\frac{1}{24}(D-2) + a]$ con $-, I$ el indice que se refiere a la coordenada X^- y los indices latinos en mayusculas denotando las $D-2$ coordenadas transversales. a se refiere a la constante usual asociada a la versión cuántica del L_0.
   Complete el argumento para concluir que $D = 26$ y $a = -1$. (Si le parece trivial el ejercicio, entonces completelo mostrando como se obtiene la expresión previa)

3. Muestre que con la elección $a = -1$ la expresion del operador M^2 es:

   $$M^2 = \frac{1}{\alpha'}(-1 + \sum_{n=1}^{\infty}(\alpha^I_n)^\dagger\alpha^I_n)$$

4. Discuta los primeros 3 niveles del espectro de cuerda abierta y cerrada en el gauge de cono de luz y cuente el número de estados en cada nivel. Muestre que estos se organizan en multipletes de $SO(D-2)$ para $n = 1$ (no-masivos) y $SO(D-1)$ para $n = 2$ (masivos).

5. A partir de la estructura del espectro estudiado en el ejercicio anterior, verifique que los estados de cuerda considerados satisfacen la importante relación:

   $$J \leq \alpha'(M^2 + 1)$$

   siendo J el rango de los tensores en los que se organizan los estados en cada nivel.

6. A partir del coorchete de Poisson entre las X^μ y P^ν:

   $$\{X^\mu(\sigma,\tau), P^\nu(\sigma',\tau)\} = i\eta^{\mu\nu}\delta(\sigma - \sigma')$$

   halle los correspondientes corchetes entre los modos de oscilación α^μ_n tanto para el caso de cuerda abierta como cerrada.

7. Usando los coorchetes de Poisson para los modos α^μ_n

   $$\{\alpha^\mu_m, \alpha^\nu_n\} = im\eta^{\mu\nu}\delta_{m+n}$$

   mostrar que los L_m (las expresiones clasicas) satisfacen:

   $$\{L_m, L_n\} = i(m-n)L_{m+n}$$

   (Es util recordar que $\{A, BC\} = \{A, B\}C + B\{A, C\}$)

8. Debido al orden normal, el conmutador entre los operadores L_m (denotadas aquí igual que sus expresiones clasicas) no cierra completamente sino que aparece un termino adicional proporcional al operador identidad en los conmutadores de la forma $[L_m, L_{-m}]$, de modo que se cumple:

$$[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n} + A(m)\delta_{n+m}$$

siendo A una función de m

(a) Usando las identidades de Jacobi (para el caso $[L_m, [L_n, L_k]]$ con $n+m+k=0$ muestre que se debe cumplir:

$$(m-n)A(k) + (n-k)A(m) + (k-m)A(n) = 0$$

.

(b) Mostrar que la solución general a esta ecuación es $A(m) = \alpha m + \beta m^3$, siendo α y β constantes.

(c) Eligiendo adecuadamente los generadores L_0, L_1, L_{-1} cumplan el algebra de $SL_2(R)$, ,muestre que la solución general es $A(m) = \frac{m^3-m}{6}A(2)$. (Notar que este argumento de la identidad de Jacobi no puede determinar el valor de $A(2)$.)