GUIA 4: Teoría de Campos Conforme.

I **Aspectos clásicos de la simetría: álgebra, grupo, cargas conservadas**

1. Demostrar que si $x^\mu \to x^\mu + \epsilon^\mu$ es una transformación conforme, entonces

   a) $\partial_\mu \epsilon_\nu + \partial_\nu \epsilon_\mu = \frac{2}{d}(\partial \cdot \epsilon)\eta_{\mu\nu}$

   b) $\partial^2 \epsilon_\mu + \frac{(d-2)}{d}\partial_\mu \partial_\rho \epsilon^\rho = 0$

   c) Usando a) y b) mostrar que para $d > 2$, $\epsilon(x)$ es a lo sumo cuadrático en x^μ.

2. Cuando se particulariza la ecuacin a) del problema anterior al caso $d = 2$ (Euclídeo), mostrar que esta se reduce a las condiciones de Cauchy-Riemann,

$$\frac{\partial \epsilon_2}{\partial x^1} = -\frac{\partial \epsilon_1}{\partial x^2}\,, \quad \frac{\partial \epsilon_1}{\partial x^1} = \frac{\partial \epsilon_2}{\partial x^2}\,.$$

   Usando coordenadas complejas $z = x^1 + ix^2$, $\zeta = \epsilon^1 + i\epsilon^2$, muestre que esto implica que la función ζ es holomorfa, i.e $\partial_{\bar{z}}\zeta = 0$.

3. Estudie la transformación conforme en dos dimensiones dada por $w = \mathrm{e}^z$ y compruebe que esta transforma líneas paralelas al eje imaginario en círculos alrededor del origen $w = 0$ y líneas paralelas al eje real en líneas pasando por el origen en $w = 0$.

4. Mostrar que L_{-1} es el generador de traslaciones, $(L_0 + \overline{L}_0)$ de las dilataciones y $i(L_0 - \overline{L}_0)$ de las rotaciones.

5. Considere la familia de funciones $f_{a,b,c,d} : C \to C$ parametrizadas por a, b, c, d números complejos sujetos a la condición: $ab - cd \neq 0$ definidas por

$$f_{a,b,c,d} \equiv \frac{az + b}{cz + d}$$

   .

   (a) Muestre que estas forman un grupo, con la composición como producto y la inversa de funciones como inversa en el grupo. Cuantos parámetros independientes tiene?

   (b) Muestre que la correspondencia entre matrices de 2×2 de determinante 1 que asigna a la matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $(ab - cd = 1)$ la función $f_{a,b,c,d}$ es un mapa 2 a 1 entre $SL_2(C)$ y el grupo definido anteriormente.

(c) Denominando M_b al primer grupo (grupo de Moebius) muestre que la relación precisa es $Mb = Sl_2(C)/Z_2$.

6. Considere una accion 2-dimensional invariante ante trasnformaciones conformes.

   (a) Halle la expresión de la corriente de Noether asociada a la transformación de parámetro ϵ en términos del tensor de energía momento

   (b) Muestre que la traza del tensor energía momento debe ser cero.

   (c) Considere el caso en que la teoría de campos esta formulada en el cilindro, siendo la coordenada no-compacta la dirección temporal. Halle la expresión de las cargas conservadas y relaciónelas con la de los L_m clásicos.

II **Teorías cuánticas de campos con simetría conforme**

7. A partir de la forma en que transforma un campo primario de peso h, halle la expresión general de la función de dos puntos G_2

8. Mostrar que la función del inciso anterior verifica las identidades de Ward.

9. El tensor Energa-Esfuerzo para un campo escalar sin masa sobre el plano complejo esta dado por

$$T(z) = -\frac{1}{2} : \partial X(z) \partial X(z) : \; .$$

   A partir de esta expresión encuentre la expansión en producto de operadores (OPE) de $T(z)T(w)$. Es $T(z)$ un campo primario?. Cuál es la carga central de esta teoría?. Usando tal expansión muestre que los modos de Fourier de $T(z)$ satisfacen el álgebra de Virasoro.

10. Para el campo escalar sin masa calcule los OPE's $T(z)\partial X(w)$, $T(z)\, \mathrm{e}^{ik\cdot X(w)}$ y a partir de ellos diga cuál es el peso conforme de los campos $\partial X(w)$ y $\mathrm{e}^{ik\cdot X(w)}$.

11. Demostrar que un campo primario ϕ de dimensión conforme h satisface

$$[L_n, \phi(w)] = h(n+1)w^n \phi(w) + w^{n+1}\partial\phi(w), \quad (n \leq -1)\, .$$

12. Usando el método de cuantización radial y el OPE de $\partial X(z)\partial X(w)$, encontrar el conmutador $[\alpha_m, \alpha_n]$.

13. Usando la correspondencia estado campo, hallar eloperador correspondiente al estado $\alpha_{-m} \mid k >$ (con $m > 0$) de la cuerda.