Guia 5: Interacciones cuerda bosonica.

1. Halle explicitamente la transformación $f(z)=\frac{az+b}{cz+d}$ que toma tres puntos arbitrarios $z_1, z_2.z_3$ y los manda a $0, 1, \infty$.
2. Mostrar que la amplitud de scattering para m taquiones (corresponientes al espectro de cuerda cerrada) esta dada por:

$$A^m(p_1,p_2,...p_m)=\frac{g_s^{m-2}}{Vol(SL(2,C)}\int\prod_{i=1}^{m}d^2z_i<\hat{V}(z_1,p_1)..\hat{V}(z_m,p_m)>$$

   donde $\hat{V}(z,p) =: e^{ipX(z,\bar{z})}$:.

3. A partir de la expresion anterior, mostrar que

$$A^m(p_1,p_2,...p_m)\sim\frac{g_s^{m-2}}{Vol(SL(2,C)}\delta^{26}(\sum_{i=1}^{m}p_i)\int\prod_{i=i}^{m}d^2z_i\prod_{j<i}\mid z_j-z_i\mid^{\alpha' p_i.p_j}$$

4. Considere el caso $m=4$ y muestre que se reduce a:

$$A^4(p_1,p_2,...p_4)\sim\frac{g_s^{2}}{Vol(SL(2,C)}\delta^2 6(\sum_{i=1}^{4}p_i)\int d^2z\mid z\mid^{\alpha' p_2.p_3}\mid 1-z\mid^{\alpha' p_3.p_4}$$

5. Expresar esta amplitud en términos de funciones Gamma y mostrar que, en términos de las variables de Maldestan, esta puede escribirse como:

$$A^4(p_1,p_2,...p_4)\sim g_s^2\frac{\Gamma(-1-\frac{\alpha' s}{4})\Gamma(-1-\frac{\alpha' t}{4})\Gamma(-1-\frac{\alpha' u}{4})}{\Gamma(2+\frac{\alpha' s}{4})\Gamma(2+\frac{\alpha' t}{4})\Gamma(2+\frac{\alpha' u}{4})}$$

6. Considere la amplitud anterior a t fijo como función de s y halle los polos, indicando la relación que tienen con el espectro de la teoría de cuerdas no interactuante.
7. Considere el limite $s\to\infty$ (t fijo) y reproduzca el comportamiento asintotico de Regge:

$$A^4(p_1,p_2,...p_4)\sim g_s^2\frac{\Gamma(-1-\frac{\alpha' t}{4})}{\Gamma(2+\frac{\alpha' t}{4})}s^{2+\alpha' t/2}$$

8. Calcule la amplitud de probabilidad, a orden arbol, de tres gravitones de momento $k_1, k_2.k_3$ y compare el resultado con el obtenido en una teoría cuántica de campos dado por el lagrangiano de Einstein Hilbert linearizado en torno a Minkwoski.
9. Muestre que la medida de integración $\frac{d^2\tau}{(Im\ \tau)^2}$ es invariante ante las transformaciones del parametro τ del grupo $Sl(2,Z)$.
10. Considere una metrica plana en el toro $ds^2=dzd\bar{z}$, siendo z una coordenada compleja sujeta a la identificación: $z\sim z+2\pi$ y $z\sim z+2\pi\tau$ siendo τ un parametro complejo denominado *parameétro modular*.
    (a) Muestre que el reticulo que define esa identificación queda invariante ante cambios en el parámetro modular dados por la combinación de transformaciones $\tau\to -1/\tau$ y $\tau+1$.
    (b) Mustre que esas dos transformaciones generan el grupo $Sl_2(Z)$, en el sentido siguiente: una transformación de la forma $f(z)=\frac{az+b}{cz+d}$ (con $a,b,c,d\in Z$ y $ad-cb=1$) se puede obtener aplicando un numero finito de veces las dos transformaciones previas.