Parcial Domiciliario de Simetrías en Física

1. **Este ejecicio tiene como finalidad repasar todo lo involucrado en el cálculo de una amplitud de scattering, considerando un caso sencillo.** Considere el scattering de 4 taquiones a nivel árbol en la teoría de cuerda bosónica cerrada, con momentos k_1, k_2, k_3, k_4.

   (a) Encuentre la expresión de la amplitud de scattering, dejándola expresada como una integral en la variable etiqueta de uno de los puntos de inserción del operador de vértice partiendo de la expresión general de una amplitud.

   (b) Reescriba dicha expresión en términos de funciones Gamma, como función de las variables de Mandelstam s, t, u definidas por:
   $s = -(k_1 + k_2)^2$, $t = -(k_1 + k_3)^2$, $u = -(k_1 + k_4)^2$.

   (c) Considerando la expresión anterior como función de s (es decir, par t fijo) halle los polos de dicha amplitud y a partir de allí lea el espectro de masas de la teoría de cuerdas bosónica cerrada.

   (Ayuda: use la conexión a internet)

2. **Espectro de teoría de supercuerdas.** Construya los estados que se obtienen para el primer nivel masivo para la teoría de cuerdas IIA después de aplicar la proyección GSO. Muestre que hay el mismo número de grados de libertad fermiónicos y bosónicos.

3. **Este ejercicio guiado tiene como finalidad ayudar a clarificar la vinculación entre proyección GSO, invariancia modular y supersimetría.**

   (a) Dada la estructura de espín en el toro denotada por (h_σ, h_τ), donde $h_i = \{+, -\}$ indica el tipo de periodicidad, escriba las estructuras de espín correspondientes a un estado de Neveu-Schwarz y a uno de Ramond. Muestre cómo transforman las estructuras de espín halladas previamente ante los generadores de las transformaciones conformes $S : \tau \to -1/\tau$ y $T : \tau \to \tau + 1$.

   Para obtener una función de partición invariante modular es necesario, entonces, incluir las cuatro estructuras de espín $(-,-)$, $(-,+)$, $(+,-)$, $(+,+)$. Si bien la estructura $(+,+)$ no "se mezcla" con las demás a un loop, es necesaria su inclusión para asegurar invariancia modular para géneros mayores.

   (b) Las contribuciones a la función de partición asociadas a las distintas estructuras de espín toman la siguiente expresión en términos de una traza para el espacio de Hilbert:

$$\chi_{ferm}^{++} = \eta_{(++)} Tr e^{2\pi i \tau H_R} (-1)^F \qquad \chi_{ferm}^{+-} = \eta_{(+-)} Tr e^{2\pi i \tau H_R}$$
$$\chi_{ferm}^{--} = \eta_{(--)} Tr e^{2\pi i \tau H_{NS}} \qquad \chi_{ferm}^{-+} = \eta_{(-+)} Tr e^{2\pi i \tau H_{NS}} (-1)^F$$

donde $\eta_{(ij)}$ son constantes a ser determinadas por invariancia modular y F es el número fermiónico hoja de mundo convencional.

Considerando la contribución $(-,-)$ y usando que la contribución al Hamiltoniano del sector fermiónico izquierdo en el gauge cono de luz es

$$H_{NS} = \sum_{i=2}^{9} \sum_{r=\frac{1}{2}}^{\infty} r b^i_{-r} b_r - \frac{1}{6}$$

muestre que

$$\chi^{--}_{ferm} = \eta_{(--)} q^{-\frac{1}{6}} \prod_{n=1}^{\infty} (1 + q^{n-\frac{1}{2}})^8$$

(c) Usando la definición de las *funciones θ de Jacobi* y repitiendo un cálculo análogo al anterior para las otras estructuras de espín, tomando en cuenta que

$$H_R = \sum_{i=2}^{9} \sum_{m=1}^{\infty} m b^i_{-m} b_m + \frac{1}{3}$$

muestre que:

$$\chi^{--}_{ferm} = \eta_{(--)} \frac{\theta_3^4(\tau)}{\eta^4} \qquad \chi^{-+}_{ferm} = \eta_{(-+)} \frac{\theta_4^4(\tau)}{\eta^4}$$
$$\chi^{+-}_{ferm} = \eta_{(+-)} \frac{\theta_2^4(\tau)}{\eta^4} \qquad \chi^{++}_{ferm} = \eta_{(++)} \frac{\theta_1^4(\tau)}{\eta^4}$$

(d) Pidiendo invariancia modular y fijando $\eta_{(--)} = 1/2$ muestre que $\eta_{(+,-)} = -1/2$. Para esto, tenga en cuenta que las funciones χ definidas anteriormente sólo consideran la parte fermiónica y que es necesario tener en cuenta también la parte bosónica en cada sector.

La función de partición adopta la siguiente expresión

$$Tr\left(e^{2\pi i\tau H_{NS}} \frac{1}{2}\left(1 - (-1)^F\right)\right) - Tr\left(e^{2\pi i\tau H_R} \frac{1}{2}\left(1 - \eta_{(++)}(-1)^F\right)\right)$$

donde $\eta_{(++)}$ puede tomar los valores ± 1. Note que esta expresión contiene a los proyectores GSO.

(e) Incluyendo la contribución de bosones y combinando sectores derechos e izquierdos, puede mostrarse que la función de partición adopta la siguiente forma:

$$Z(\tau, \bar{\tau}) = \frac{1}{4} \frac{1}{(Im\tau)^4} \frac{1}{\mid \eta \mid^{24}} \mid \theta_3^4 - \theta_4^4 - \theta_2^4 \mid^2$$

Identifique en esta expresión la contribución bosonica e interprete el hecho de que esta expresión vale cero idénticamente (lo cual puede verse usando la identidad de Riemann)

Funciones θ de Jacobi:

$$\theta\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix}(0|\tau) = \eta(\tau)e^{2\pi i\alpha\beta}q^{\alpha^2/2-1/24}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+q^{n+\alpha-1/2}e^{2i\pi\beta}\right)\left(1+q^{n-\alpha-1/2}e^{-2i\pi\beta}\right)$$

$$\theta\begin{bmatrix}1/2\\ 1/2\end{bmatrix} = \theta_1$$

$$\theta\begin{bmatrix}1/2\\ 0\end{bmatrix} = \theta_2$$

$$\theta\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix} = \theta_3$$

$$\theta\begin{bmatrix}0\\ 1/2\end{bmatrix} = \theta_4$$

Identidades útiles:

$$\theta_2(\tau+1) = e^{i\pi/4}\theta_2(\tau) \qquad \theta_2(-1/\tau) = (-i\tau)^{(1/2)}\theta_4(\tau)$$

$$\theta_3(\tau+1) = \theta_4(\tau) \qquad \theta_3(-1/\tau) = (-i\tau)^{(1/2)}\theta_3(\tau)$$

$$\theta_4(\tau+1) = \theta_3(\tau) \qquad \theta_4(-1/\tau) = (-i\tau)^{(1/2)}\theta_2(\tau)$$

$$\eta(\tau+1) = e^{i\pi/12}\eta(\tau) \qquad \eta(-1/\tau) = (-i\tau)^{(1/2)}\eta(\tau)$$

$\theta_2^4 - \theta_3^4 + \theta_4^4 = 0.$ Identidad de Riemann