Práctica 1: Segunda cuantización. Modelos

Problema 1

(a) Dado el Hamiltoniano del oscilador armónico $H = \hbar\omega[a^\dagger a + 1]$, mostrar

$$\langle \hat{n} \rangle = \frac{1}{e^{\beta\hbar\omega} - 1}, \tag{1}$$

donde $\beta = 1/k_B T$ y $\hat{n} = a^\dagger a$. Escribiendo las ecuaciones de movimiento, mostrar que las fluctuaciones de punto cero para la posición en el estado fundamental están descriptas por la siguiente función de correlación:

$$\langle \{x(t), x(0)\} \rangle = \frac{\hbar}{2m\omega} \cos(\omega t). \tag{2}$$

Generalizar este resultado para el caso de temperatura finita y comentar el resultado.

Problema 2

Dados los operadores $a, a^\dagger$ que satisfacen reglas de conmutación canónicas, encontrar las condiciones que deben cumplir los coeficientes u, v para que la transformación canónica preserve las relaciones de conmutación:

$$\begin{aligned} b &= ua + va^\dagger, \\ b^\dagger &= ua^\dagger + va. \end{aligned} \tag{3}$$

Encontrar explicitamente u, v para diagonalizar al Hamiltoniano

$$H = \omega(a^\dagger a + \frac{1}{2}) + \frac{\Delta}{2}(a^\dagger a^\dagger + aa). \tag{4}$$

Problema 3

Considerar una red unidimensional de átomos con masa $m_j = m$ si j es impar y $m_j = M$ si j es par, descripta por el siguiente Hamiltoniano:

$$H = \sum_j [\frac{p_j^2}{2m_j} + \frac{k}{2}(x_j x_{j-1})^2], \tag{5}$$

(a) Calcular las frecuencias clásicas de los modos normales y las correspondientes coordenadas normales. Dibujar esquemáticamente las relaciones de dispersión.
(b) Escribir el Hamiltoniano diagonalizado en segunda cuantización.

Problema 4

La transformación de Holstein-Primakoff representa operadores de spin 1/2 en términos de operadores bosónicos:

$$\begin{aligned} S^z &= \frac{1}{2} - a^\dagger a, \\ S^+ &= (1 - a^\dagger a)^{1/2} a, \\ S^- &= a^\dagger (1 - a^\dagger a)^{1/2}. \end{aligned} \tag{6}$$

Mostrar que con estas definiciones los operadores de spin satisfacen el álgebra SU(2).

Problema 5

Mostrar que los operadores de spin 1/2 pueden representarse por los siguientes operadores fermiónicos:

$$\begin{aligned} S^z &= \frac{1}{2}[c^\dagger_\uparrow c_\uparrow - c^\dagger_\downarrow c_\downarrow], \\ S^+ &= c^\dagger_\uparrow c_\downarrow, \\ S^- &= c^\dagger_\downarrow c_\uparrow. \end{aligned} \tag{7}$$

Problema 6

Considerar el Hamiltoniano de tight-binding en una red que consta de dos subredes con átomos de tipo A y B:

$$H = w \sum_{i,\delta} (a^\dagger_i b_{i+\delta} + b^\dagger_i a_{i+\delta}) + E_A \sum_i a^\dagger_i a_i + E_B \sum_i b^\dagger_i b_i, \tag{8}$$

donde a_i, b_i son operadores fermiónicos y δ indica primeros vecinos del sitio i. Escribir una transformación que diagonalice este Hamiltoniano considerando condiciones de contorno periódicas en 1D y 2D. Escribir la estructura de los autoestados. Considerar diferentes llenados y discutir si el sistema corresponde a un aislador o a un metal.

Problema 7

a) Considerar un sistema de electrones interactuantes con una repulsión Coulombiana. Representar este sistema en segunda cuantización utilizando la base de funciones de Wannier. El modelo de Hubbard corresponde al límite en el cuál sólo se retiene la componente local de la interacción. Derivar el modelo de Hubbard extendido en el que se agregan las componentes de la interacción entre sitios que son primeros vecinos. Escribir este Hamiltoniano de manera que se manifiesten explícitamente todas las simetrías del problema.
b) Agregar un término Zeeman, que representa el acoplamiento del spin electrónico con un campo magnético externo. Considerar el campo en las direcciones x, y, z.

Problema 8

(opcional) Considerar el Hamiltoniano de Su-Schrieffer-Heeger en 1D

$$H[\Delta] = \sum_i [t(1+\Delta)c^\dagger_{i,A}c_{i,B} + t(1-\Delta)c^\dagger_{i+1,A}c_{i,B} + h.c.] + u\Delta^2, \tag{9}$$

donde Δ representa una distorsión de dimerización de la red. Diagonalizar el Hamiltoniano y mostrar que hay un gap de energía para $\Delta \neq 0$: inestabilidad de Pierls. Interpretar.