Práctica 2: Funciones de Green

Problema 1

A partir de la ecuación de movimiento calcular la funciones de Green a $T = 0$, a T finita, avanzada y retardada:
(a) Para un sistema de electrones libres.
(b) Para un sistema de fonones acústicos.
Expresarlas como funciones del tiempo y de la frecuencia.

Problema 2

Considerar las funciones espectrales en un sistema con invarianza traslacional:

$$\begin{aligned} A(\mathbf{p}, \omega) &= -2\mathrm{Im}[G^R(\mathbf{p}, \omega)], \\ R(\mathbf{p}, \omega) &= -2\mathrm{Im}[U^R(\mathbf{p}, \omega)], \end{aligned} \tag{1}$$

donde $G^R(\mathbf{p}, \omega)$ y $U^R(\mathbf{p}, \omega)$ son funciones de Green para sistemas fermiónicos y bosónicos, respectivamente. Usando la representación de Lehmann
(a) Mostrar que satisfacen la siguiente regla de suma:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} A(\mathbf{p}, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} R(\mathbf{p}, \omega) = 1. \tag{2}$$

(b) Mostrar que como funciones de ω tienen una paridad definida.
(c) Mostrar que el valor medio del número de partículas con momento $\mathbf{p}$ se escribe en cada caso:

$$\begin{aligned} \langle n(\mathbf{p}) \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} n_F(\omega) A(\mathbf{p}, \omega), \\ \langle n(\mathbf{p}) \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} n_B(\omega) U(\mathbf{p}, \omega), \end{aligned} \tag{3}$$

donde $n_F(\omega)$ y $n_B(\omega)$ son, respectivamente, las funciones de Fermi-Dirac y Bose Einstein.
(d) A partir de las propiedades anteriores, discutir el significado físico de estas funciones espectrales.

Problema 3

(a) Mostrar que las siguientes funciones de Green satisfacen las siguientes representaciones en un sistema con invarianza traslacional:

$$
\begin{aligned}
G^{R,A}((\mathbf{p},\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega'}{2\pi} \frac{A(\mathbf{p},\omega')}{\omega \pm i\eta - \omega'}, \\
\mathcal{G}((\mathbf{p},i\omega_n) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega'}{2\pi} \frac{A(\mathbf{p},\omega')}{i\omega_n - \omega'}.
\end{aligned} \tag{4}
$$

(b) Encontrar las correspondientes representaciones como funciones del tiempo.

Problema 4

Considerar un sistema de electrones con una interacción electron-fonon. Dibujar los diagramas de Feynman correspondientes a la evaluación de la función de Green de Matsubara al orden más bajo de la teoría de perturbaciones y escribir las expresiones correspondientes a al menos uno de ellos.

Problema 5

(a) Considerar un diagrama "burbuja" y mostrar que el cálculo de la suma de Matsubara correspondiente es:

$$
\frac{1}{\beta} \sum_{ip_n} \mathcal{G}^{(0)}(\mathbf{p}, ip_n) \mathcal{G}^{(0)}(\mathbf{k}, ip_n + i\omega_n) = \frac{n_F(\xi_{\mathbf{p}}) - n_F(\xi_{\mathbf{k}})}{i\omega_n + \xi_{\mathbf{p}} - \xi_{\mathbf{k}}}, \tag{5}
$$

donde $\mathcal{G}^{(0)}(\mathbf{p}, ip_n)$ es una función de Green de Matsubara correspondientes a fermiones libres con una relación de dispersión $\varepsilon_{\mathbf{p}}$ y un potencial químico μ mientras que $\xi_{\mathbf{p}} = \varepsilon_{\mathbf{p}} - \mu$.
(b) Mostrar esquemáticamente que este diagrama aparece en la evaluación de la función de Green del modelo de jellium al segundo orden de teoría de perturbaciones.
(c) Dibujar los correspondientes diagramas al primer orden.