Práctica 4: Magnetismo y soluciones de campo medio

Problema 1

Considerar el modelo de Hubbard en una red bipartita

$$H = -t \sum_{\langle ij \rangle, sigma} [c^\dagger_{i,\sigma} c_{j,\sigma} + H.c.] + U \sum_i n_{i\uparrow} n_{j\downarrow}. \quad (1)$$

Por simplicidad, considerar el caso 1D y proponer una solución de campo medio con orden antiferromagnético de la forma $\langle n_{j\sigma} \rangle = n + (-1)^j \sigma m_{AF}$. Luego generalizar para sistemas de mayor dimensionalidad.
(a) Discutir el significado físico de m_{AF}, escribir una transformación canónica que diagonalice al Hamiltoniano en campo medio y encontrar una ecuación autoconsistente para este parámetro.
(b) Encontrar la relación de dispersión para esta solución y discutir la naturaleza metálica o aisladora del sistema. Discutir qué condiciones deben cumplirse para esperar que esta solución sea una buena aproximación de la solución exacta de este sistema. (c) Escribir las expresión para la funci'on de Green de Matsubara $\mathcal{G}(\mathbf{k}, i\omega_n)$.

Problema 2

Considerar el Hamiltoniano de Hubbard

$$H = \sum_{\mathbf{p},\sigma} c^\dagger_{\mathbf{p},\sigma} c_{\mathbf{p},\sigma} + \frac{U}{N} \sum_{\mathbf{p},\mathbf{p}',\mathbf{q}} c^\dagger_{\mathbf{p}+\mathbf{q},\uparrow} c_{\mathbf{p},\uparrow} c^\dagger_{\mathbf{p}'+\mathbf{q},\downarrow} c_{\mathbf{p}',\downarrow}. \quad (2)$$

(a) Usando argumentos de invarianza traslacional y la representación de los operadores de $SU(2)$ de subida y bajada en términos de operadores fermiónicos, mostrar que la susceptibilidad magnética puede escribirse:

$$\begin{aligned}
\chi^{-+}(\mathbf{r}, t) &= \sum_{\mathbf{pq}} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \chi^{-+}(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t), \\
\chi^{-+}(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t) &= i\Theta(t) \langle [c^\dagger_{\mathbf{p}+\mathbf{q}\downarrow}(t) c_{\mathbf{p}\uparrow}(t), S^+(0,0)] \rangle, \\
S^+(0,0) &= \sum_{\mathbf{p}'\mathbf{q}'} c^\dagger_{\mathbf{p}'+\mathbf{q}'\uparrow}(0) c_{\mathbf{p}'\downarrow}(0). \quad (3)
\end{aligned}$$

(b) Usando la representación diagramática en términos de diagrama de burbujas mostrar que la susceptibilidad puede escribirse como

$$\chi^{-+}(\mathbf{q},\omega) = \frac{\Gamma^{-+}(\mathbf{q},\omega)}{1 - U\Gamma^{-+}(\mathbf{q},\omega)}, \tag{4}$$

siendo $\chi^{-+}(\mathbf{q},\omega) = \sum_{\mathbf{p}} \chi^{-+}(\mathbf{p},\mathbf{q}$ y presentar la expresión explícita para $\Gamma^{-+}(\mathbf{q},\omega)$.
(c) Mostrar que existe una inestabilidad correspondiente a que el sistema tienda a formar espontáneamente un estado ferromagnético cuando se satisface el criterio de Stoner:

$$U\rho(\epsilon_f) = 1, \tag{5}$$

siendo $\rho(\epsilon_f)$ la densidad de estados del sistema no interactuante en el nivel de Fermi.

Problema 3

Considerar al modelo de Heisenberg anisotrópico:

$$H = -\sum_{\langle ij\rangle} \{J^z S_i^z S_j^z + J^\perp [S_i^x S_j^x + S_i^y S_j^y]\}, \tag{6}$$

siendo $J^z > J^\perp > 0$.

(a) Escribir el estado fundamental de este Hamiltoniano y calcular su energía.

(b) Utilizando la transformación de Holstein-Primakoff para representar a las excitaciones en términos de ondas de spin, mostrar que la magnetización se desvía de su valor de saturación siguiendo una ley exponencial en $-1/T$ a bajas temperaturas, en contraste con el comportamiento $\propto T^{3/2}$ observado en el caso isotrópico.

(c) Mostrar que en el caso isotrópico, la corrección dominante en la representación de ondas de spin diverge en $2D$, mientras que tal divergencia no tiene lugar en el caso anisotrópico. Interpretar y discutir este resultado.

Problema 4

Considerar el Hamiltoniano de Heisenberg antiferromagnético en un dímero:

$$H = J[S_1^z S_2^z + S_1^x S_2^x + S_1^y S_2^y], \tag{7}$$

con $J > 0$.

(a) Calcular exactamente las autoenergías y autoestados de este Hamiltoniano. Discutir la naturaleza del estado fundamental y de los excitados. Analizar primero las simetrías de este modelo y aprovecharlas para resolverlo.

(b) Calcular la función de partición y la susceptibilidad magnética. Discutir el comportamiento de esta última en el límite de altas temperaturas.

Problema 5

Considerar el Hamiltoniano XY con campo magnético en z en una dimensión

$$H = J \sum_{ij} [S_i^x S_j^x + S_i^y S_j^y] - \mu_B B \sum_j S_j^z. \tag{8}$$

Diagonalizarlo mediante la transformación de Jordan-Wigner que mapea spines en fermiones. Discutir si puede generalizarse trivialmente esta transformación para poder resolver este problema en un sistema de mayor dimensionalidad.