Práctica 5: Superconductividad. Teorías fenomenológicas y teoría BCS

Problema 1

(a) Mostrar que $f_n(T,0) - f_s(T,0) = [H_c(T)]^2/(8\pi)$, siendo f_n, f_s las energías libres de las fases normal y superconductora, respectivamente.

(b) Mostrar que de la teoría de Ginzburg-Landau se predice la ecuación de London para la corriente superconductora, indentificando $|\psi|^2 = n_s$, siendo n_s la densidad de "portadores superconductores".

(c) Teniendo en cuenta la teoría micrsocópica, cual sería a relación que vincula la carga efectiva e^* del funcional de Ginzburg-Landau y la carga e de un electrón?

Problema 2

(a) Probar que la función de onda del estado fundamental de la teoría BCS:

$$|\Phi\rangle = \prod_{\mathbf{k}} [1 + g_{\mathbf{k}} c^\dagger_{\mathbf{k},\uparrow} c^\dagger_{-\mathbf{k},\downarrow}]|0\rangle, \tag{1}$$

puede escribirse alternativamente como un estado coherente:

$$|\Phi\rangle = \exp[\sum_{\mathbf{k}} g_{\mathbf{k}} c^\dagger_{\mathbf{k},\uparrow} c^\dagger_{-\mathbf{k},\downarrow}]|0\rangle. \tag{2}$$

(b) Mostrar:

$$\begin{aligned}
\langle\Phi|\Phi\rangle &= \prod_{\mathbf{k}} [1 + |g_{\mathbf{k}}|^2]^{1/2} = N^2, \\
b_{\mathbf{k}} &= \frac{1}{N^2}\langle\Phi|c_{-\mathbf{k}\downarrow} c_{\mathbf{k}\uparrow}|\Phi\rangle = \frac{g_{\mathbf{k}}}{1 + |g_{\mathbf{k}}|^2}, \\
\frac{1}{N^2}&\langle\Phi|c^\dagger_{\mathbf{k}\uparrow} c^\dagger_{-\mathbf{k}\downarrow} c_{-\mathbf{k}'\downarrow} c_{\mathbf{k}'\uparrow}|\Phi\rangle = b^*_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}'}.
\end{aligned} \tag{3}$$

Problema 3

(a) Mostrar que los operadores de Bogoliubov $\gamma_{\mathbf{k},\alpha}, \gamma^\dagger_{\mathbf{k},\alpha}$ satisfacen reglas de conmutación fermiónicas.

(b) Calcular la energía de condensado, definida como la diferencia entre la energ'ıa del estado fundamental superconductor y la energía del estado normal.

Problema 4

El superconductor MgB_2 fue descubierto recientemente y tiene una $T_c \sim 40$K [Nature 410, 63, (2004)]. Este compuesto tiene dos bandas que cruzan el nivel de Fermi y hay indicios de que está originada en el mecanismo electron-fonon. Un buen punto de partida en la teoría microscópica de este material es un Hamiltoniano tipo BCS con dos bandas:

$$\begin{aligned} H &= \sum_{\mathbf{k}\sigma} \xi^{(1)}_{\mathbf{k}} a^\dagger_{\mathbf{k}\sigma} a_{\mathbf{k}\sigma} + \sum_{\mathbf{k}\sigma} \xi^{(2)}_{\mathbf{k}} b^\dagger_{\mathbf{k}\sigma} b_{\mathbf{k}\sigma} - \sum_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} V_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} a^\dagger_{\mathbf{k}\uparrow} a^\dagger_{-\mathbf{k}\downarrow} a_{-\mathbf{k}'\downarrow} a_{\mathbf{k}'\uparrow} \\ &\quad - \sum_{\mathbf{q},\mathbf{q}'} U_{\mathbf{q},\mathbf{q}'} b^\dagger_{\mathbf{q}\uparrow} b^\dagger_{-\mathbf{q}\downarrow} b_{-\mathbf{q}'\downarrow} b_{\mathbf{q}'\uparrow} - \sum_{\mathbf{k},\mathbf{q}'} J_{\mathbf{k},\mathbf{q}'} (a^\dagger_{\mathbf{k}\uparrow} a^\dagger_{-\mathbf{k}\downarrow} b_{-\mathbf{q}'\downarrow} b_{\mathbf{q}'\uparrow} + hc), \end{aligned} \tag{4}$$

con:

$$\begin{aligned} V_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} &= V,\ |\xi^1_{\mathbf{k}}| < \omega_D, \qquad V_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} = 0, |\xi^1_{\mathbf{k}}| \geq \omega_D, \\ U_{\mathbf{q},\mathbf{q}'} &= U,\ |\xi^2_{\mathbf{k}}| < \omega_D, \qquad U_{\mathbf{q},\mathbf{q}'} = 0, |\xi^2_{\mathbf{k}}| \geq \omega_D, \\ J_{\mathbf{k},\mathbf{q}'} &= J,\ |\xi^1_{\mathbf{k}}|, |\xi^2_{\mathbf{k}}| < \omega_D, \qquad J_{\mathbf{k},\mathbf{q}'} = 0, |\xi^1_{\mathbf{k}}|, |\xi^2_{\mathbf{k}}| \geq \omega_D. \end{aligned} \tag{5}$$

(a) Derivar las ecuaciones para el gap.

(b) Discutir la posibilidad de dos transsiciones de fase, considerando que para este compuesto: $U \sim J \sim V/3$.