SUPERCONDUCTIVIDAD

Guía 1: conductores y medios magnéticos

Modelo de Drude

1. Se tiene un metal con una densidad n de portadores con carga e y masa m, en presencia de un campo eléctrico uniforme $\mathbf{E}$.

a. Usando el modelo de Drude, estime la probabilidad de que el tiempo τ entre dos choques sucesivos de un mismo electrón se encuentre en el intervalo diferencial de tiempo entre t y $t + \mathrm{d}t$.

b. Calcule la energía promedio perdida como resultado de las colisiones por electrón, por unidad de tiempo. Muestre que la potencia perdida en un cable de resistencia R por el que circula una corriente I es $I^2 R$.

c. Escriba la relación constitutiva entre $\mathbf{E}$ y $\mathbf{J}$ para un conductor perfecto (sin pérdidas).

2. Considere un conductor por el cual circula una densidad de corriente $\mathbf{J} = J_x\, \hat{x}$, sometido a un campo magnético externo $\mathbf{H} = H_z\, \hat{z}$. Utilizando el modelo de Drude:

a. muestre que en el régimen estacionario el campo eléctrico en el conductor posee una componente no nula en $\hat{y}$;

b. exprese el coeficiente Hall $R_{\mathrm{H}} = E_y/(J_x H_z)$ en términos de la densidad, la carga y la masa de los portadores.

Medios magnéticos

3. Un material lineal sometido a un campo alterno $\mathbf{H}(t) = \mathbf{H}_0\, e^{i\omega t}$ exhibe una magnetización dependiente del tiempo $\mathbf{M}(t) = \chi_{\mathrm{ac}}\, \mathbf{H}(t)$, donde $\chi_{\mathrm{ac}} = \chi' - i\chi''$ es la *susceptibilidad alterna*. Calcule la potencia media disipada por unidad de volumen en el material.

4. Para un material magnético no lineal sometido a un campo $H(t) = H_{\mathrm{dc}} + H_{\mathrm{ac}}\, e^{i\omega t}$, ¿bajo qué condiciones $\chi_{\mathrm{ac}} \simeq \left.\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}H}\right|_{H_{\mathrm{dc}}}$?

5. Se tiene una placa conductora infinita de espesor $2d$, resistividad ρ y permeabilidad magnética μ, sometida a un campo externo uniforme $\mathbf{H}(t) = \mathbf{H}_0\, e^{i\omega t}$ paralelo a la interfase, con $\omega \ll 1/\tau_{\mathrm{Drude}}$.

a. Calcule $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ y $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$ en el interior del conductor y muestre que ambos decaen en una distancia característica $\delta = \sqrt{2\rho/\omega\mu}$, llamada espesor pelicular (o *skin depth*).

b. Calcule la magnetización media $\bar{\mathbf{M}}(t) = \frac{1}{V}\int \mathbf{M}(\mathbf{r},t)\mathrm{d}V$ y halle las componentes real e imaginaria de la susceptibilidad alterna χ_{ac} tal que $\bar{\mathbf{M}}(t) = \chi_{\mathrm{ac}}\,\mathbf{H}(t)$. *Ayuda:* no expanda el argumento complejo de las funciones hiperbólicas hasta el final, donde puede usar que

$$\tanh\left[(1+i)x\right] = \frac{\sinh(2x) + i\sin(2x)}{\cosh(2x) + \cos(2x)}.$$

c. Muestre que en el límite $d \ll \delta$ vale $\chi_{\mathrm{ac}} \simeq \chi_{\mathrm{dc}} = \mu/\mu_0 - 1$ y en el límite $d \gg \delta$, $\chi_{\mathrm{ac}} \to -1$. Para un dado conductor, ¿a qué límite de frecuencia corresponde cada caso?

d. ¿Para qué valores de δ/d resulta máxima χ''? Discuta su significado.

6. Se tiene un disco de radio a, espesor $b \ll a$ y susceptibilidad magnética χ en un campo continuo $\mathbf{H}_0$, aplicado paralelamente al eje.

a. Calcule $\mathbf{H}$ en el interior, lejos del borde, y determine el factor demagnetizante.

b. ¿Cómo es $\mathbf{H}$ respecto de $\mathbf{H}_0$ en el interior de un material diamagnético y en uno paramagnético?

c. Compare la magnetización resultante para esta geometría con la de un cilindro delgado ($b \gg a$) en ambos casos.

Medición de propiedades magnéticas

7. Sobre el eje de una espira de radio a se sitúa una muestra de magnético $\mathbf{m}$ y dimensiones características $d \ll a$, a una distancia z del plano de la espira.

a. Calcule el flujo magnético $\Phi(z)$ que atraviesa la espira. *Ayuda:* puede ahorrarse integrales complicadas si modela la muestra como una pequeña espira y explota la simetría de las inductancias mutuas.

b. Muestre que si la espira forma parte de un circuito puramente inductivo y la muestra se desplaza a lo largo del eje, la corriente instantánea en el circuito resulta lineal con $\Phi[z(t)]$

8. Un transformador diferencial (fig. 1) consta de un solenoide (primario) de longitud l. Este encierra dos bobinas planas (secundarios) idénticas, de radio a, coaxiales y simétricamente dispuestas respecto del solenoide a una distancia b entre sí. Ambos secundarios se conectan en serie, pero en sentidos opuestos. Se coloca una muestra de dimensiones $d \ll a, b$ en el centro de uno de los secundarios y se alimenta el primario con una corriente alterna.

a. Exprese la señal medida a la salida de los secundarios en función de χ_{ac} y demás parámetros que crea relevantes. Considere $l \gg a, b$.

b. ¿Es posible realizar esta medición con un único secundario? Discuta las ventajas de utilizar ambos.

9. Un gradiómetro axial de derivada segunda está formado por cuatro espiras planas dispuestas como se muestra en la fig. 2. Dichas espiras se conectan a un circuito puramente inductivo a través del cual se registra la corriente inducida mientras una muestra de susceptibilidad magnética χ y volumen $V \ll a^3$ se desplaza a lo largo del eje del sistema. Todo el conjunto se encuentra inmerso en un campo externo $\mathbf{H}$ uniforme y paralelo al eje.

a. Usando los resultados del problema 7, halle la relación entre el momento magnético de la muestra y $\Delta i = i(0) - \int_{-\Delta z}^{+\Delta z} i(z')\mathrm{d}z'$, con $\Delta z \gg b$. *Ayuda:* no necesita integrar.

b. Muestre que el flujo magnético neto en el conjunto de espiras del gradiómetro solo es sensible a $\frac{\mathrm{d}^2 B_z}{\mathrm{d}z^2}$, o derivadas de orden mayor.

c. Compare la influencia sobre el gradiómetro de una fuente no deseada de campo magnético, situada a una distancia $d \gg a, b$, con la que tendría esa misma fuente sobre una única espira o una sonda de efecto Hall.

d. Analice el efecto que generaría sobre la corriente instantánea en el circuito una pequeña deriva temporal del campo aplicado, con $\Delta H \ll H$. Compare esta situación con la misma medición realizada utilizando una sola bobina.

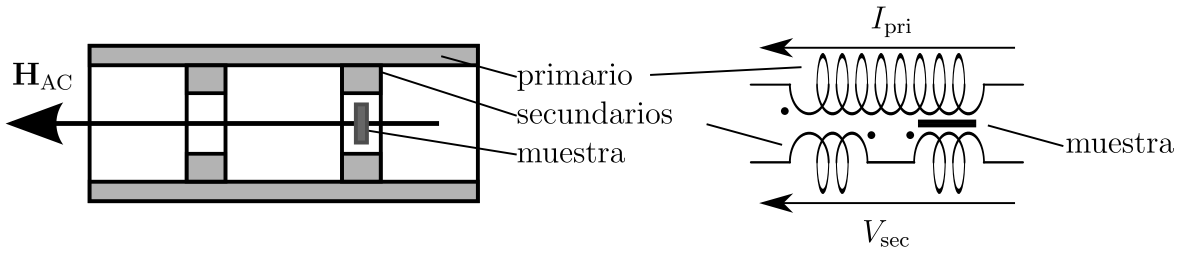

Figura 1: Vista en corte y esquema eléctrico de un transformador diferencial.

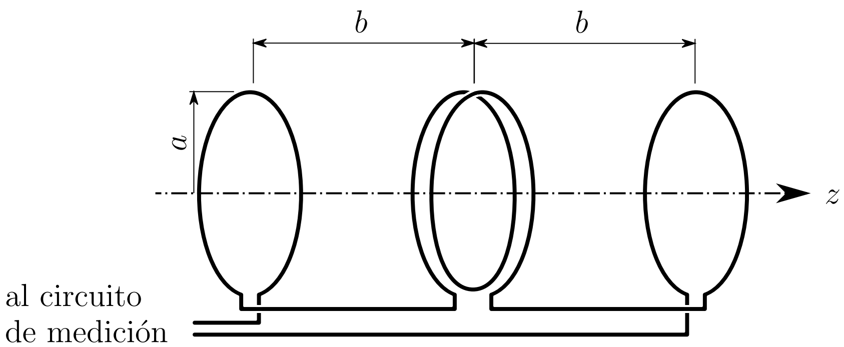

Figura 2: Esquema de un gradiómetro.