

Resolución y comentarios sobre el primer parcial de Física Teórica 1

En las siguientes páginas encontrarán la resolución del primer parcial de la materia Física Teórica 1 (1er cuatrimestre de 2017). Antes de pasar a ello, les dejamos algunos comentarios generales sobre este primer parcial.

En la hoja del parcial se encontraba indicado el peso de cada ejercicio en la nota total y durante el examen se aclaró que la nota de aprobación era de 6 puntos sobre los 10 que sumaban los ejercicios. En la corrección, cada problema fue puntuado del 0 al 10, y luego ponderado de acuerdo a los puntajes indicados.

Se presentaron al examen 27 de los 47 alumnos inscriptos a la materia. Entre los presentes, tuvimos 16 aprobados (*A*), 7 exámenes calificados como insuficientes (*I*) y 4 exámenes con *A⁻*. Los alumnos que obtuvieron *A⁻* podrán evitar realizar el recuperatorio del primer parcial si en el segundo parcial de la materia obtienen una nota de aprobación que les informaremos eventualmente (será algo más que la nota de aprobación del examen).

En la siguiente tabla hay algunas estadísticas para aquellos a los que les gusta la numerología.

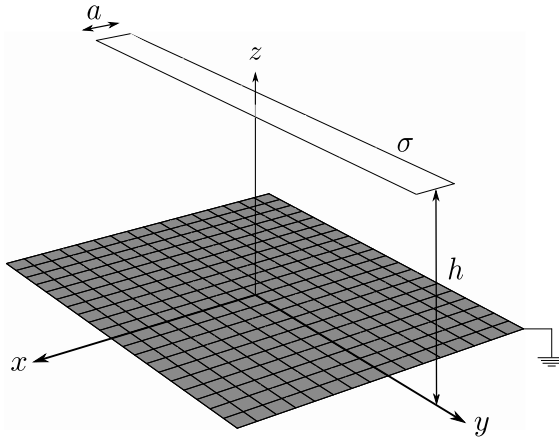
	Ejercicio 1	Ejercicio 2	Ejercicio 3	Ejercicio 4	Total
Nota promedio	7,7	7,6	4,4	5	6,2
Desviación	2,4	2,2	3,1	3,1	1,9
% Aprobación (Nota>6)	79	89	43	39	61

Ignacio Borsa corrigió el ejercicio 1, David Blanco los ejercicios 2 y 4, y Juan Zanella el ejercicio 3. Si tienen dudas sobre los criterios específicos utilizados en la corrección y puntuación de cada problema pueden acercarse a hablar con la cátedra. También aceptamos (¡y agradecemos!) correcciones o comentarios sobre esta resolución.

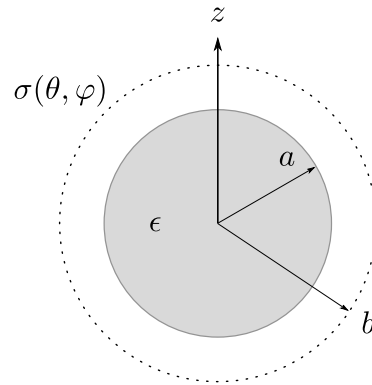
En las páginas siguientes les dejamos el enunciado original completo del parcial, junto con su hoja de fórmulas amiga, todo tal y como les fue entregado el día del examen. Luego de ello podrán encontrar los problemas resueltos.

Por favor: resolver cada problema en hojas separadas e indicar el nombre en todas ellas.

- 1 (2 puntos) Encontrar el potencial eléctrico producido en todo el espacio en la situación que muestra la figura (plano infinito a tierra y cinta paralela al plano con densidad de carga uniforme σ , longitud infinita y ancho a , ubicada a una distancia h del plano).



Problema 1



Problema 2

- 2 (3 puntos) Una esfera dieléctrica (lineal, isotrópica y homogénea) de permitividad ϵ y radio a tiene centro en el origen de coordenadas. Concéntrica a ella, sobre la superficie de radio $b > a$, hay una densidad de carga superficial $\sigma(\varphi, \theta)$, en las coordenadas esféricas usuales, dada por:

$$\sigma(\varphi, \theta) = \sum_{n=1}^N \frac{\lambda}{r_n} \delta \left[\cos \theta - \cos \left(\frac{\pi n}{2N} \right) \right], \quad \text{para cierto } N \text{ fijo, } \lambda > 0 \text{ y } r_n = b \operatorname{sen} \left(\frac{\pi n}{2N} \right).$$

- (a) Caracterizar geoméricamente la densidad de carga superficial dada por $\sigma(\varphi, \theta)$.
- (b) Hallar el potencial electrostático en todo el espacio y calcular la carga total y el momento dipolar total inducidos en el dieléctrico.
- 3 (3 puntos) Dios creó el universo y luego creó el imán y vio que el imán era bueno, y en un punto cualquiera de su interior situó al hombre, y vio que el hombre era bueno. Mas, disconforme con estar inmerso en un campo magnético, rogó a Dios el hombre que el campo cesara, o que, en su defecto, tuviera a bien aniquilarlo, porque peor que no ser es vivir inmerso en un campo. Y en verdad os digo que Dios oyó su ruego. Y como Él no abre una puerta sin cerrar una ventana, dijo:

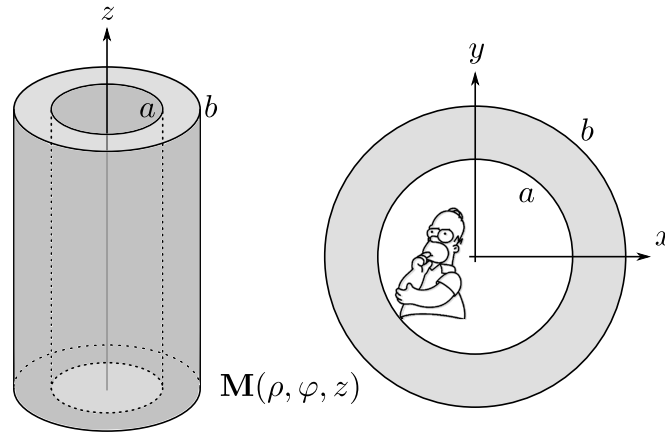
“Hombre, el imán en el que vives es un cilindro hueco, de radio interior a y exterior b , y su longitud es infinita. Su magnetización es

$$\mathbf{M}(\rho, \varphi, z) = M_0 \left[\cos qz \hat{z} + f(\rho) \operatorname{sen} qz \hat{\rho} \right].$$

donde $q > 0$ y $M_0 > 0$. Elige tú, ¡oh, hombre!, la función f que más te acomode”. Y el hombre eligió una función f y en $\rho < a$ el campo fue cero.

El problema consiste en encontrar una tal función y en calcular el campo magnético \mathbf{B} en todo el espacio. La solución puede quedar en términos de las derivadas de un potencial. (Ayuda: plantear

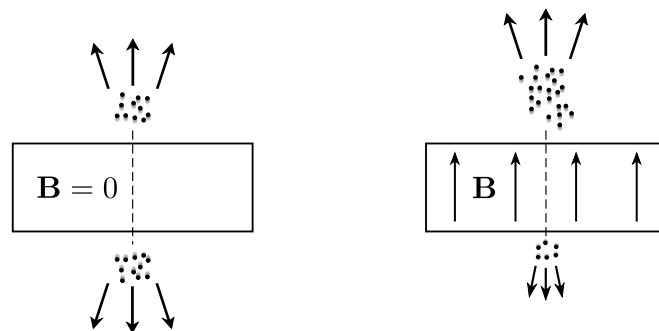
el cálculo del campo para una f cualquiera y luego quedarse con la clase de funciones que haga que desaparezca la contribución más difícil de calcular).



Problema 3: despreciar cualquier efecto producido por Homero.

4 (2 puntos) Decidir si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa. Justificar.

- (a) Toda distribución de carga con simetría azimutal tiene todos sus momentos multipolares nulos, con excepción, a lo sumo, del monopolar.
- (b) Sea $G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ la función de Green con condiciones de contorno de Dirichlet en un volumen V acotado. Entonces, vale que $G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') < \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$ (Ayuda: recordar que $G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} + \Lambda(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, con $\bar{\nabla}^2 \Lambda = 0$).
- (c) La máquina de la figura es simétrica respecto del plano indicado por la línea de trazos. En su interior hay un campo magnético estático y uniforme \mathbf{B} . Dentro de la máquina hay una fuente isotrópica de partículas que pueden escapar por cualquiera de los dos extremos. La figura muestra que, cuando $\mathbf{B} \neq 0$, salen más partículas a través de un extremo que del otro. Se puede afirmar, entonces, que las únicas interacciones que sufren las partículas son debidas al campo magnético (Ayuda: reflejar el experimento).



1 Algunas funciones especiales:

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos\theta) e^{im\varphi} \quad (\text{armónicos esféricos}). \quad (1)$$

$$P_l^m(x) = \frac{(-1)^m}{2^l l!} (1-x^2)^{m/2} \frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}} (x^2-1)^l \quad (\text{polinomios asociados de Legendre}). \quad (2)$$

$$P_l(x) \doteq P_l^0(x) \quad (\text{polinomios de Legendre}). \quad (3)$$

$$J_\nu(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j! \Gamma(j+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^j \quad (\text{función de Bessel de orden } \nu \text{ del primer tipo}). \quad (4)$$

2 Algunas relaciones de ortogonalidad:

$$\int_0^{2\pi} d\varphi e^{im\varphi} e^{-im'\varphi} = 2\pi \delta_{m,m'} \quad (m, m' \text{ enteros}). \quad (5)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{ikx} e^{-ik'x} = 2\pi \delta(k-k') \quad (k, k' \text{ reales}). \quad (6)$$

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \sin\theta Y_{l'm'}(\theta, \varphi) Y_{lm}^*(\theta, \varphi) = \delta_{l,l'} \delta_{m,m'}. \quad (7)$$

$$\int_{-1}^1 dx P_{l'}^m(x) P_l^m(x) = \frac{2}{2l+1} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \delta_{l,l'}. \quad (8)$$

$$\int_{-1}^1 dx P_{l'}(x) P_l(x) = \frac{2}{2l+1} \delta_{l,l'}. \quad (9)$$

$$\int_0^a d\rho J_\nu\left(\frac{x_{\nu n}}{a}\rho\right) J_\nu\left(\frac{x_{\nu n'}}{a}\rho\right) = \delta_{n,n'} \frac{a^2 J_{|\nu|+1}^2(x_{\nu n'})}{2} \quad (x_{\nu n} \text{ es la raíz } n\text{-ésima de } J_\nu, \nu \geq 0). \quad (10)$$

$$\int_0^{+\infty} d\rho \rho J_\nu(k\rho) J_\nu(k'\rho) = \frac{1}{k} \delta(k-k') \quad (k, k' \text{ reales}). \quad (11)$$

3 Miscelánea:

$$I'_\nu(x) K_\nu(x) - I_\nu(x) K'_\nu(x) = \frac{1}{x} \quad (\text{Wronskiano de } I_\nu(x) \text{ y } K_\nu(x)). \quad (12)$$

Problema 1

Ignacio Borsa*

Encontrar el potencial eléctrico producido en todo el espacio en la situación que muestra la figura (plano infinito a tierra y cinta paralela al plano con densidad de carga uniforme σ , longitud infinita y ancho a , ubicada a una distancia h del plano).

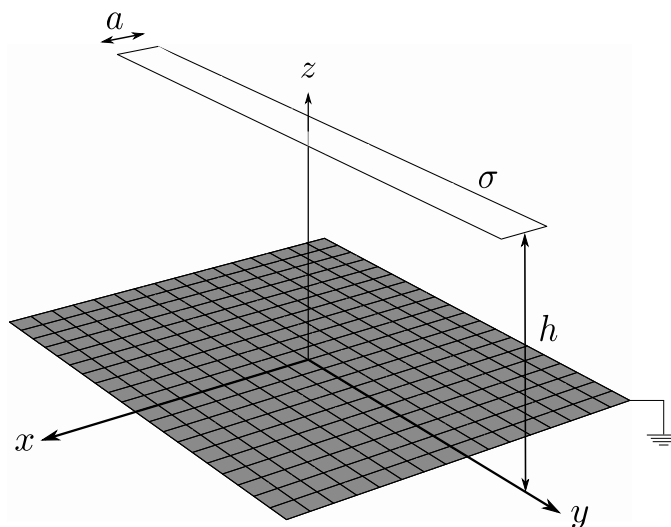


Figura 1: Fleje de ancho a frente a un plano conductor a tierra.

El problema nos pide calcular el potencial eléctrico para todo el espacio para la configuración de la figura (1).

Comencemos notando que, para la zona $z < 0$ el potencial es idénticamente 0 (se tiene $\phi(z = 0) = 0$ y $\lim_{z \rightarrow -\infty} \phi = 0$, para una región sin cargas libres)

Con respecto a la región $z > 0$, la forma más elegida para resolver el problema fue proponer un desarrollo en cartesianas para el

*borsa.ignacio@gmail.com

potencial ϕ . En ese caso, puede pensarse a la cinta cargada como una distribución superficial de carga situada en $z = h$ de la forma

$$\sigma(x, y) = \sigma \Theta\left(\frac{a}{2} - |x|\right), \quad (1)$$

donde $\Theta\left(\frac{a}{2} - |x|\right)$ vale 1 si $-a/2 \leq x \leq a/2$, y 0 en caso contrario.

Haciendo esa elección, podemos escribir la dependencia de x e y en término de exponenciales imaginarias, y la dependencia en z como combinaciones de exponenciales reales.

Una forma de reducir la cantidad de cuentas era darse cuenta de que la distribución de cargas que escribimos no depende de la variable y (de hecho, esto es algo esperable por la simetría ante traslaciones en \hat{y} de nuestro problema), y por lo tanto el potencial tampoco debería depender de dicha variable. Por lo tanto, el desarrollo para el potencial es de la forma:

$$\phi(\vec{r}) = \int_{-\infty}^{+\infty} dk_x e^{ik_x x} [A(k_x, k_y) e^{kz} + B(k_x, k_y) e^{-kz}] \quad (2)$$

Como además el potencial debe anularse sobre el plano $z = 0$, bien comportado para $\phi \rightarrow +\infty$ y continuo en $z = h$ podemos escribir directamente:

$$\phi(\vec{r}) = \int_{-\infty}^{+\infty} dk_x e^{ik_x x} A(k_x) \sinh(kz_{<}) e^{-kz_{>}}, \quad (3)$$

donde $k = \sqrt{k_x^2}$, $z_{<} = \min\{z, h\}$ y $z_{>} = \max\{z, h\}$.

Supongamos que no matamos la dependencia en y de entrada. En ese caso, el desarrollo para el potencial debe incluir las soluciones de la forma $e^{ik_y y}$, por lo que tenemos:

$$\phi(\vec{r}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_x dk_y e^{ik_x x} e^{ik_y y} A(k_x, k_y) \sinh(kz_{<}) e^{-kz_{>}}, \quad (4)$$

con $k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$.

Todavía tenemos que calcular los coeficientes $A(k_x, k_y)$. Para eso, usamos el salto de la componente normal del campo en $z = h$.

$$(\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \cdot \hat{n} = 4\pi\sigma, \quad (5)$$

$$\left(\frac{\partial\phi_1}{\partial z} - \frac{\partial\phi_2}{\partial z}\right)\Big|_{z=h} = 4\pi\sigma, \quad (6)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_x dk_y e^{ik_x x} e^{ik_y y} A(k_x, k_y) k = 4\pi\sigma. \quad (7)$$

Podemos desarrollar σ en la misma base de Fourier, de manera de poder leer la igualdad de la ecuación (7) como igualdades para cada uno de los $A(k_x, k_y)$.

Escribiendo σ en la misma base del desarrollo de ϕ , tenemos:

$$\sigma = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_x dk_y e^{ik_x x} e^{ik_y y} \hat{\sigma}(k_x, k_y), \quad (8)$$

En este caso, $\hat{\sigma}(k_x, k_y)$ corresponde a la transformada de Fourier de $\sigma(x, y)$ (una forma alternativa de despejar los coeficientes es usar la ortogonalidad de las exponenciales imaginarias):

$$\hat{\sigma}(k_x, k_y) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dx dy e^{-ik_x x} e^{-ik_y y} \sigma(x, y). \quad (9)$$

Usando que $\sigma(x, y) = \sigma \Theta\left(\frac{a}{2} - |x|\right)$, llegamos a

$$\hat{\sigma} = \frac{\sigma}{(2\pi)^2} \left(\int_{-a/2}^{a/2} dx e^{ik_x x} \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} dy e^{ik_y y} \right). \quad (10)$$

$$\hat{\sigma} = \frac{\sigma}{(2\pi)} \frac{2 \sin\left(\frac{k_x a}{2}\right)}{k_x} \delta(y). \quad (11)$$

Y por lo tanto

$$A(k_x, k_y) = 4\sigma \delta(y) \frac{\sin\left(\frac{k_x a}{2}\right)}{k_x k} \quad (12)$$

El hecho de haber obtenido la delta nos dice que el único k_y permitido para nuestro problema es $k_y = 0$, indicando, en definitiva, que el resultado final no va a depender de y , como podríamos haber anticipado en base a la simetría del sistema.

Finalmente, volviendo a la expresión que teníamos para el potencial (Eq. 4), obtenemos:

$$\phi(\vec{r}) = \int_{-\infty}^{+\infty} dk_x e^{ik_x x} \frac{4\sigma}{|k_x|k_x} \sin\left(\frac{k_x a}{2}\right) \sinh(|k_x|z_<) e^{-|k_x|z_>}. \quad (13)$$

Donde usamos que $k = |k_x|$.

Un error bastante común(y poco importante) fue escribir $k = k_x$ al usar la $\delta(y)$ en la expresión del potencial. Se puede ver que, como está escrito en la Eq.(13), el potencial que obtuvimos es invariante frente a reflexiones respecto del plano zy ($x \rightarrow -x$), lo que se corresponde con la simetría del problema respecto del mismo plano.

Algunas formas alternativas para resolver el problema, que algunos de ustedes utilizaron son:

- Usar el método de imágenes: Inspirados en el resultado para una carga frente a un plano conductor, se puede imaginar que el potencial de nuestro problema corresponde al potencial generado por la cinta con distribución de carga uniforme σ , mas el correspondiente a una cinta con densidad de carga superficial $-\sigma$ ubicada en $z = -h$. En ese caso, se puede calcular el potencial de una cinta cargada ubicada en $z = 0$ usando separación de variables, y luego trasladar el resultado a $z = h$ y $z = -h$ para obtener el potencial total.
- Usar la función de Green para un plano cargado, integrando sobre la cinta. En ese caso, es conveniente escribir el desarrollo de la función de Green en cartesianas (en la base de Fourier en x e y) para poder realizar la integración sin dificultades.

En términos generales, no fue un problema con el que se hayan visto muchas dificultades. La mayoría logró plantear el desarrollo y utilizar las condiciones de contorno de manera correcta.

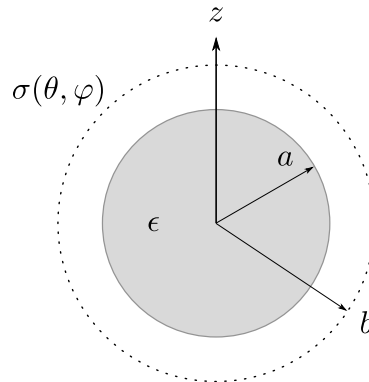
Problema 2

David Blanco*

Una esfera dieléctrica (lineal, isotrópica y homogénea) de permitividad ϵ y radio a tiene centro en el origen de coordenadas. Concéntrica a ella, sobre la superficie de radio $b > a$, hay una densidad de carga superficial $\sigma(\varphi, \theta)$, en las coordenadas esféricas usuales, dada por:

$$\sigma(\varphi, \theta) = \sum_{n=1}^N \frac{\lambda}{r_n} \delta \left[\cos \theta - \cos \left(\frac{\pi n}{2N} \right) \right], \quad (2.1)$$

para cierto N fijo, $\lambda > 0$ y $r_n = b \sin \left(\frac{\pi n}{2N} \right)$.



- (a) *Caracterizar geoméricamente la densidad de carga superficial dada por $\sigma(\varphi, \theta)$.*

Esta fue la parte del problema con la que hubo más inconvenientes. La consigna era sencilla: en general, veníamos dando una descripción geométrica de la densidad de cargas, que luego ustedes debían

* dblanco@iafe.uba.ar

expresar matemáticamente al resolver los problemas; aquí, decidimos invertir la consigna y darles ya escrita la densidad de carga (para que pudieran operar en la parte (b) con la forma correcta de la distribución $\sigma(\theta, \varphi)$) y pedirles que dijeran a qué correspondía esa densidad de carga.

La gran mayoría se dio cuenta de que la densidad de carga era no nula sólo sobre N anillos concéntricos al eje z , y que estos anillos se encontraban sobre el hemisferio norte de la esfera, en las posiciones dadas por $\theta_n = \frac{\pi n}{2N}$, con $n = 1, 2, \dots, n$. Esto se deducía del hecho de que en $\sigma(\theta, \varphi)$ aparecía una delta de $\cos\theta - \cos\theta_n$, que se anula para todo θ que no sea θ_n . También era sencillo notar por trigonometría que el radio del anillo n -ésimo era r_n .

Lo que casi ninguno hizo fue decir la densidad de carga que tenían esos anillos. La densidad de carga lineal de cada anillo era constante (ya que en que las variables que multiplicaban a la delta no había dependencia con las coordenadas), pero distintos anillos tenían diferentes densidades lineales de carga. Esto se podía ver aislando el término n -ésimo de la suma e integrando esta cantidad en toda la superficie. Es decir, la densidad de carga superficial del anillo n -ésimo viene dada por

$$\sigma_n(\theta, \varphi) = \frac{\lambda}{r_n} \delta \left[\cos\theta - \cos\left(\frac{\pi n}{2N}\right) \right], \quad (2.2)$$

y la integral de esta cantidad en la superficie S_b dada por $r = b$ (que a su vez es la carga total del anillo n -ésimo) da

$$Q_n = \int_{S_b} \sigma_n(\theta, \varphi) = \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi b^2 \sin\theta \sigma_n(\theta, \varphi) = \frac{2\pi b^2 \lambda}{r_n}. \quad (2.3)$$

Por otro lado, ustedes saben que si un anillo tiene una densidad de carga lineal constante λ_n y radio r_n , su carga total es

$$Q_n = 2\pi r_n \lambda_n; \quad (2.4)$$

comparando estas últimas dos ecuaciones podían llegar a que la densidad lineal de carga del anillo n -ésimo estaba dada por

$$\lambda_n = \lambda \frac{b^2}{r_n^2}. \quad (2.5)$$

Dar Q_n o λ era equivalente, dado que con el radio de cada anillo podía calcularse una a partir de la otra.

Con este apartado aprendimos más nosotros que ustedes, y vemos que tenemos que reforzar un poco este tema que parece no haber quedado claro.

- (b) *Hallar el potencial electrostático en todo el espacio y calcular la carga total y el momento dipolar total inducidos en el dieléctrico.*

En este apartado casi nadie tuvo inconvenientes. En las clases de práctica vimos muchos problemas similares, donde había simetría azimutal y las densidades de carga aparecían sólo sobre superficies esféricas. También habíamos calculado el potencial generado por una superficie esférica cargada con una densidad superficial arbitraria con simetría azimutal.

Hay dos observaciones que ayudan a que el problema sea sencillo. La primera de ellas es notar que la densidad de carga libre tiene simetría azimutal (no depende de φ). Esto, sumado al hecho de que los medios involucrados son isótropos y homogéneos, nos permite asegurar que la densidad de carga de polarización también tiene simetría azimutal. La segunda observación tiene que ver con el hecho de que al no haber cargas libres en el volumen del dieléctrico, las únicas cargas de polarización inducidas sobre el dieléctrico se encuentran sobre su superficie. Con estas dos observaciones, el problema de hallar el potencial se reduce notablemente, ya que se pueden superponer los potenciales de dos superficies esféricas con una densidad superficial de carga con simetría azimutal. Así, tenemos

$$\Phi(\mathbf{r}) = \Phi_\sigma(\mathbf{r}) + \Phi_\epsilon(\mathbf{r}), \quad (2.6)$$

donde $\Phi_\sigma(\mathbf{r})$ es el potencial generado por la densidad de carga libre $\sigma(\varphi, \theta)$ ubicada en $r = b$ y $\Phi_\epsilon(\mathbf{r})$ es el potencial que generan las cargas de polarización inducidas sobre la superficie del dieléctrico en $r = a$. Estas dos contribuciones tienen la misma forma

$$\Phi_\sigma(\mathbf{r}) = \sum_{l=0}^{+\infty} A_l P_l(\cos\theta) \begin{pmatrix} r^l \\ r^{l+1} \end{pmatrix}_{(r,b)} \quad \text{y} \quad \Phi_\epsilon(\mathbf{r}) = \sum_{l=0}^{+\infty} B_l P_l(\cos\theta) \begin{pmatrix} r^l \\ r^{l+1} \end{pmatrix}_{(r,a)}, \quad (2.7)$$

donde A_l y B_l son incógnitas que aún tenemos que determinar.

Las condiciones que restan imponer están asociadas a las discontinuidades del campo eléctrico sobre las superficies $r = a$ y $r = b$. En $r = b$ tenemos

$$(\mathbf{E}|_{r=b^+} - \mathbf{E}|_{r=b^-}) \cdot \hat{e}_r = 4\pi\sigma(\varphi, \theta), \quad (2.8)$$

lo que nos lleva a

$$\frac{\partial\Phi_\sigma}{\partial r}|_{r=b^-} - \frac{\partial\Phi_\sigma}{\partial r}|_{r=b^+} = 4\pi\sigma(\varphi, \theta). \quad (2.9)$$

En esta última ecuación, la contribución de Φ_ϵ desaparece, dado que el campo que genera en $r = b$ es continuo. Esta relación nos dará los coeficientes A_l . Para ello, debemos escribir a $\sigma(\varphi, \theta)$ como un desarrollo en la base $\{P_l(\cos\theta)\}_{l=0}^{+\infty}$, es decir buscamos escribir

$$\sigma(\varphi, \theta) = \sum_{l=0}^{+\infty} \sigma_l P_l(\cos\theta) \quad (2.10)$$

para ciertos σ_l , que podemos determinar sencillamente utilizando la siguiente relación de ortogonalidad

$$\int_{-1}^1 dx P_{l'}(x) P_l(x) = \frac{2}{2l+1} \delta_{l,l'}. \quad (2.11)$$

Introduciendo en (2.10) la forma explícita de $\sigma(\varphi, \theta)$ dada por (2.1), multiplicando a ambos lados por $P_{l'}(\cos\theta)$, e integrando en $x = \cos\theta$, obtenemos

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 dx \sum_{n=1}^N \frac{\lambda}{r_n} \delta\left[x - \cos\left(\frac{\pi n}{2N}\right)\right] P_{l'}(x) &= \int_{-1}^1 dx \sum_{l=0}^{+\infty} \sigma_l P_l(x) P_{l'}(x) \Rightarrow \\ \Rightarrow \sum_{n=1}^N \frac{\lambda}{r_n} P_{l'}\left(\cos\left(\frac{\pi n}{2N}\right)\right) &= \sum_{l=0}^{+\infty} \sigma_l \frac{2}{2l+1} \delta_{l,l'}, \end{aligned}$$

lo que nos da

$$\sigma_l = \frac{2l+1}{2} \sum_{n=1}^N \frac{\lambda}{r_n} P_l\left(\cos\left(\frac{\pi n}{2N}\right)\right). \quad (2.12)$$

Ya conocidos los σ_l , de la ecuación (2.9) se desprende

$$A_l = \frac{4\pi b^2}{2l+1} \sigma_l = 2\pi b^2 \sum_{n=1}^N \frac{\lambda}{r_n} P_l \left(\cos \left(\frac{\pi n}{2N} \right) \right). \quad (2.13)$$

Nos resta ahora determinar los coeficientes B_l . Como en $r = a$ tenemos una densidad de carga inducida que no conocemos, es quizás más conveniente plantear la continuidad de la componente normal del desplazamiento eléctrico en tal interfase

$$(\mathbf{D}|_{a^+} - \mathbf{D}|_{a^-}) \cdot \hat{e}_r = 0, \quad (2.14)$$

ya que en $r = a$ no tenemos densidad de carga libre. En términos del potencial, esto se escribe como

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} \Big|_{a^+} = \epsilon \frac{\partial \Phi}{\partial r} \Big|_{a^-}. \quad (2.15)$$

Notemos que en este caso la relación queda escrita en términos del potencial completo (no podemos simplificar las contribuciones de Φ_σ a ambos lados de la ecuación debido al factor ϵ). Esta última ecuación nos determina las constantes B_l en términos de las A_l

$$B_l = -A_l \left(\frac{a}{b} \right)^{l+1} \frac{l(\epsilon - 1)}{l\epsilon + l + 1}. \quad (2.16)$$

El cálculo del potencial queda así resuelto (está dado por la suma de Φ_σ y Φ_ϵ , y las constantes A_l y B_l quedan determinadas por las ecuaciones (2.13) y (2.16), respectivamente). El resultado obtenido tiene sentido, ya que si $\epsilon = 1$ (es decir, no hay medio dieléctrico) sólo nos queda $\Phi = \Phi_\sigma$. La parte final del ejercicio, que nos pide calcular la carga total y el momento dipolar total inducidos en el dieléctrico es también útil para verificar que el resultado hallado es razonable. Veamos cómo hacer esta última parte.

Como se piden momentos inducidos en el dieléctrico, tenemos que mirar sólo la parte del potencial generada por la carga inducida en el dieléctrico, es decir, Φ_ϵ . La carga neta inducida la podremos leer del primer término del desarrollo multipolar de Φ_ϵ , que será igual a

la carga total inducida sobre r . Este término, se obtiene aislando el sumando con $l = 0$ en la expresión de Φ_ϵ cuando $r \gg a$

$$\Phi_\epsilon^{(l=0)} = B_0 P_0(\cos\theta) \frac{a^0}{r^{0+1}} = 0, \quad (2.17)$$

que se anula debido a que $B_0 = 0$. Entonces, la carga neta inducida es nula, como era de esperar ya que el medio es neutro en carga.

El momento dipolar total inducido se obtiene mirando el sumando con $l = 1$

$$\Phi_\epsilon^{(l=1)} = B_1 P_1(\cos\theta) \frac{a^1}{r^{1+1}} = B_1 \cos\theta \frac{a}{r^2}, \quad (2.18)$$

y recordando que el potencial de un dipolo ideal (ubicado en $r = 0$) está dado por

$$\Phi_{\text{dipolo}}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{e}}_r}{r^2}; \quad (2.19)$$

Para que resulte $\Phi_\epsilon^{(l=1)} = \Phi_{\text{dipolo}}$ debemos tener

$$\mathbf{p} = B_1 a \hat{\mathbf{e}}_z = -\frac{2\pi\lambda a^3}{b} \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} \sum_{n=1}^N \cot\left(\frac{\pi n}{2N}\right) \hat{\mathbf{e}}_z. \quad (2.20)$$

Como $\cot\left(\frac{\pi n}{2N}\right)$ es positivo para todo n , tenemos un dipolo inducido que apunta en sentido contrario a $\hat{\mathbf{e}}_z$ (recordar que $\lambda > 0$); esto es natural, debido a que los anillos cargados positivamente ubicados en el hemisferio superior generan una mayor concentración de carga negativa en la parte superior del dieléctrico, dando así un dipolo efectivo que apunta hacia abajo.

Problema 3

J. F. ZANELLA*

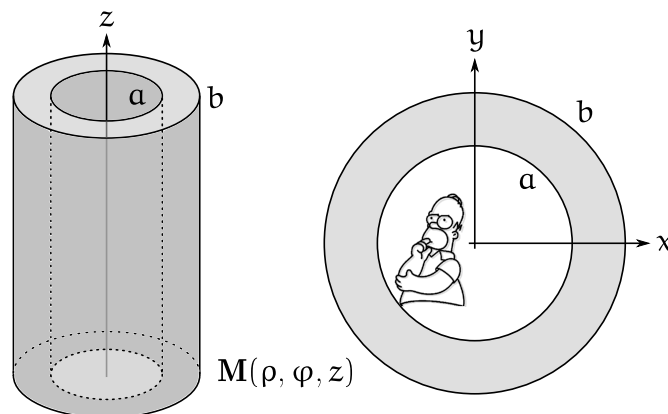
Dios creó el universo y luego creó el imán y vio que el imán era bueno, y en un punto cualquiera de su interior situó al hombre, y vio que el hombre era bueno. Mas, disconforme con estar inmerso en un campo magnético, rogó a Dios el hombre que el campo cesara, o que, en su defecto, tuviera a bien aniquilarlo, porque peor que no ser es vivir inmerso en un campo. Y en verdad os digo que Dios oyó su ruego. Y como Él no abre una puerta sin cerrar una ventana, dijo:

“Hombre, el imán en el que vives es un cilindro hueco, de radio interior a y exterior b , y su longitud es infinita. Su magnetización es

$$\mathbf{M}(\rho, \varphi, z) = M_0 \left[\cos qz \hat{z} + f(\rho) \sin qz \hat{\rho} \right].$$

donde $q > 0$ y $M_0 > 0$. Elige tú, ¡oh, hombre!, la función f que más te acomode”. Y el hombre eligió una función f y en $\rho < a$ el campo fue cero.

El problema consiste en encontrar una tal función y en calcular el campo magnético \mathbf{B} en todo el espacio. La solución puede quedar en términos de las derivadas de un potencial. (Ayuda: plantear el cálculo del campo para una f cualquiera y luego quedarse con la clase de funciones que haga que desaparezca la contribución más difícil de calcular).



*zanellaj@df.uba.ar

■ LA magnetización para $a \leq \rho \leq b$ es

$$\mathbf{M}(\rho, \varphi, z) = M_0 \left[\cos qz \hat{z} + f(\rho) \sin qz \hat{\rho} \right]. \quad (1)$$

Como no hay corrientes libres, el problema para \mathbf{H} es análogo a un problema electrostático, de modo que $\mathbf{H} = -\nabla\Phi$. Por otro lado, debido a que la magnetización es conocida en todo el espacio, las fuentes de este potencial pueden calcularse explícitamente. Conviene separarlas en fuentes en volumen y fuentes en superficie. Sobre las superficies $\rho = a$ y $\rho = b$, hay dos densidades de “carga magnética”, dadas por el salto de la componente radial de la magnetización,¹

$$\sigma_a(z) = -M_0 f(a) \sin qz, \quad (2)$$

$$\sigma_b(z) = M_0 f(b) \sin qz.$$

En el volumen propiamente dicho, habrá una densidad volumétrica dada por la divergencia de la magnetización. Para un campo con simetría azimutal resulta

$$\nabla \cdot \mathbf{M}(\rho, \varphi, z) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho M_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial M_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial M_z}{\partial z}. \quad (3)$$

Luego:

$$\rho_V(\rho, z) = -\nabla \cdot \mathbf{M}(\rho, \varphi, z) = M_0 \left[q - \frac{1}{\rho} (\rho f)' \right] \sin qz. \quad (4)$$

Teniendo en cuenta la simetría azimutal, el potencial completo será entonces:

$$\Phi(\rho, z) = \Phi_a(\rho, z) + \Phi_b(\rho, z) + \Phi_V(\rho, z). \quad (5)$$

Por experiencia sabemos que las contribuciones volumétricas son las más difíciles de integrar. Podríamos tratar de anular esta contribución desde

¹Un error harto frecuente y que nunca hubiéramos dicho que iba a ocurrir fue escribir las densidades superficiales de la siguiente manera, por ejemplo:

$$\sigma_b(z) = M_0 f(\rho) \sin qz \Big|_b = M_0 f(\rho) \sin qz,$$

como el si ρ dentro de la función f no existiera. Que cada uno reflexione qué lo puede haber llevado a hacer eso. Por el número de heridos, sospechamos que no es una distracción. El hecho de que algo tan trivial parezca tener raíces más profundas hace pensar que tal vez la enseñanza mayor de este problema sea justamente ese tropiezo.

el comienzo. Queremos que $\nabla \cdot \mathbf{M} = 0$, o

$$q - \frac{1}{\rho}(\rho f)' = 0. \quad (6)$$

El primer término no depende de ρ , de manera que si se elige $f = \alpha\rho$ queda

$$\frac{1}{\rho}(\rho f)' = 2\alpha, \quad (7)$$

y la elección $\alpha = q/2$ sirve a nuestros propósitos de anular $\nabla \cdot \mathbf{M}$. El problema es que en tal caso f queda completamente determinada. Si después queremos imponer la condición $\Phi = 0$ para $\rho < a$, no tendremos ningún parámetro a nuestra disposición. Nada que ajustar. Sería una verdadera coincidencia que justo la elección más simple de f que anula $\nabla \cdot \mathbf{M}$ fuese también la que anula Φ en $\rho < a$. En general, la clase completa de funciones que anula la divergencia de \mathbf{M} puede obtenerse integrando la condición (6). En efecto:

$$\begin{aligned} (\rho f)' = \rho q &\Rightarrow \rho f(\rho) = \frac{q}{2}\rho^2 + C \\ \Rightarrow f(\rho) &= \frac{q}{2}\rho + \frac{C}{\rho}. \end{aligned} \quad (8)$$

Ahora tenemos un parámetro a nuestra disposición, ya no dependemos de una coincidencia. La cuestión entonces es ver si valiéndonos únicamente de las densidades superficiales y de la libertad en la elección de C podemos anular el campo en la región central.

Las contribuciones Φ_a y Φ_b tendrán la forma genérica de un potencial con simetría azimutal generado por distribuciones superficiales sobre un cilindro de radio dado. Así, por ejemplo, usando un desarrollo de Fourier en senos y cosenos en todo el eje z , será:

$$\Phi_a(\rho, z) = \int_0^\infty dk \left[A(k) \cos kz + B(k) \sin kz \right] I_0(k\rho_{<}) K_0(k\rho_{>}) \Big|_a. \quad (9)$$

La notación

$$g(\rho_{<}) h(\rho_{>}) \Big|_a \quad (10)$$

indica que la comparación que define $\rho_{<}$ y $\rho_{>}$ es entre ρ y a . Debido a que las densidades superficiales en este problema son proporcionales a

la función $\sin qz$, también podemos anticipar que el desarrollo anterior incluirá sólo el término con $k = q$ para las funciones \sin ,

$$\Phi_a(\rho, z) = AI_0(q\rho_{<})K_0(q\rho_{>})\Big|_a \sin qz, \quad (11)$$

y análogamente para Φ_b

$$\Phi_b(\rho, z) = BI_0(q\rho_{<})K_0(q\rho_{>})\Big|_b \sin qz. \quad (12)$$

Cada uno de estos potenciales se determina a partir del salto de su derivada normal al atravesar la superficie que contiene sus fuentes. Ese salto involucra siempre el cálculo de expresiones de la forma

$$qI'_0(q\rho_0)K_0(q\rho_0) - qI_0(q\rho_0)K'_0(q\rho_0), \quad (13)$$

para las cuales vale usar la identidad $I'_\nu K_\nu - I_\nu K'_\nu = 1/x$. Luego, las condiciones de salto se escriben como:

$$\begin{aligned} \frac{A}{a} \sin qz &= \sigma_a(z), \\ \frac{B}{b} \sin qz &= \sigma_b(z). \end{aligned} \quad (14)$$

Entonces,

$$\begin{aligned} A &= -4\pi M_0 af(a), \\ B &= 4\pi M_0 bf(b). \end{aligned} \quad (15)$$

Con esto tenemos lo necesario para escribir las contribuciones superficiales:

$$\begin{aligned} \Phi_\sigma(\rho, z) &= \Phi_a(\rho, z) + \Phi_b(\rho, z) \\ &= 4\pi M_0 \left[bf(b)I_0(q\rho_{<})K_0(q\rho_{>})\Big|_b - af(a)I_0(q\rho_{<})K_0(q\rho_{>})\Big|_a \right] \sin qz. \end{aligned} \quad (16)$$

Dentro y fuera del imán propiamente dicho, la elección entre $\rho_{<}$ y $\rho_{>}$ es la misma para las dos contribuciones, y encontramos

$$\Phi_\sigma(\rho < a, z) = 4\pi M_0 \left[bf(b)K_0(qb) - af(a)K_0(qa) \right] I_0(q\rho) \sin qz, \quad (17)$$

$$\Phi_\sigma(\rho > b, z) = 4\pi M_0 \left[bf(b)I_0(qb) - af(a)I_0(qa) \right] K_0(q\rho) \sin qz. \quad (18)$$

Vemos que ni no hubiera ninguna otra contribución al potencial, éste podría anularse en $\rho < a$ eligiendo

$$bf(b)K_0(qb) = af(a)K_0(qa). \quad (19)$$

Si reemplazamos en esta condición la forma (8) de f que hace que la contribución de volumen se anule, la Ec. (19) implica que el potencial en la región $\rho < a$ es cero si

$$b \left[\frac{q}{2}b + \frac{C}{b} \right] K_0(qb) = a \left[\frac{q}{2}a + \frac{C}{a} \right] K_0(qa). \quad (20)$$

Con lo que nos queda

$$C = -\frac{q}{2} \left[\frac{b^2 K_0(qb) - a^2 K_0(qa)}{K_0(qb) - K_0(qa)} \right]. \quad (21)$$

Esto era suficiente. Alcanzaba luego con decir que $\mathbf{B} = 0$ si $\rho < a$, $\mathbf{B} = -\nabla\Phi_\sigma + 4\pi\mathbf{M}$ para $a < \rho < b$ y $\mathbf{B} = -\nabla\Phi_\sigma$ para $\rho > b$. Solo por completitud escribiremos aquí los resultados finales para Φ_σ :

$$\Phi_\sigma(\rho, z) = 4\pi M_0 \frac{q}{2} \left(\frac{b^2 - a^2}{K_b - K_a} \right) \sin qz \begin{cases} 0, & \text{si } \rho \leq a, \\ (K_\rho I_a - K_a I_\rho) K_b, & \text{si } a \leq \rho \leq b, \\ (K_b I_a - K_a I_b) K_\rho, & \text{si } b \leq \rho, \end{cases} \quad (22)$$

[$K_a \equiv K_0(qa)$, etc.] que muestran una tranquilizadora simetría, además de hacer evidente la continuidad de Φ_σ en $\rho = a$ y $\rho = b$. También supera el desafío de la blancura:

$$[\Phi] = [M][q][a^2] = [M][a] = [B][L]. \quad (23)$$

¿Qué hubiera pasado si en lugar de darnos cuenta desde el principio de que el potencial iba a ser proporcional a $\sin qz$, proponíamos la forma general

$$\Phi_a(\rho, z) = \int_0^\infty dk \left[A(k) \cos kz + B(k) \sin kz \right] I_0(k\rho_{<}) K_0(k\rho_{>})?, \quad (24)$$

o algo de apariencia levemente más simple, como

$$\Phi_a(\rho, z) = \int_{-\infty}^{\infty} dk A(k) e^{ikz} I_0(|k|\rho_{<}) K_0(|k|\rho_{>}). \quad (25)$$

La primera forma hubiera requerido escribir σ_a como

$$\sigma_a(z) = \int_0^{\infty} dk [A_\sigma(k) \cos kz + B_\sigma(k) \sin kz]. \quad (26)$$

No es difícil demostrar que

$$A_\sigma(k) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dz \sigma_a(z) \cos kz, \quad (27)$$

$$B_\sigma(k) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dz \sigma_a(z) \sin kz. \quad (28)$$

Las relaciones de ortogonalidad necesarias que se usan aquí son

$$\int_{-\infty}^{\infty} dz \cos kz \cos k'z = \pi \delta(k - k'), \quad (k, k' \geq 0), \quad (29)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dz \sin kz \sin k'z = \pi \delta(k - k'), \quad (k, k' > 0). \quad (30)$$

Tener en cuenta que senos y cosenos son ortogonales entre sí siempre. En este problema era

$$\sigma_a = -M_0 f(a) \sin qz, \quad (31)$$

de modo que

$$A_\sigma(k) = 0, \quad (32)$$

$$B_\sigma(k) = -M_0 f(a) \delta(k - q). \quad (33)$$

Término a término en k , la condición de salto de la derivada normal de Φ_a se lee entonces como

$$\frac{1}{a} \begin{cases} A(k) = 0, \\ B(k) = -4\pi M_0 f(a) \delta(k - q), \end{cases} \quad (34)$$

de donde

$$\begin{aligned}\Phi_a(\rho, z) &= -4\pi M_0 a f(a) \int_0^\infty dk \delta(k - q) I_0(k\rho_<) K_0(k\rho_>) \sin kz \\ &= -4\pi M_0 a f(a) I_0(k\rho_<) K_0(k\rho_>) \sin qz.\end{aligned}\quad (35)$$

Si se usa el segundo tipo de desarrollo, Ec. (25), hay que tener el cuidado de usar $|k|$ en los argumentos de las funciones de Bessel o, en todo caso, considerarlas como funciones pares de su argumento. Como en clase no insistimos demasiado sobre eso, tampoco durante la corrección nos pusimos demasiado escrupulosos con esa cuestión. Dicho eso, se trata del desarrollo de Fourier exponencial que ya conocen de cartesianas, así que no había mayor dificultad en llegar al resultado de que $\Phi_a \propto \sin qz$. Los pasos fundamentales son:

$$\sigma_a(z) = \int_{-\infty}^{\infty} dk \hat{\sigma}_a(k) e^{ikz}, \quad (36)$$

donde

$$\hat{\sigma}_a(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dz \sigma_a(z) e^{-ikz}. \quad (37)$$

Usando la forma explícita de $\sigma_a(z) = -M_0 f(a) \sin qz$, se obtiene

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_a(k) &= -\frac{M_0 f(a)}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dz \sin qz e^{-ikz} \\ &= -\frac{M_0 f(a)}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dz \frac{e^{iqz} - e^{-iqz}}{2i} e^{-ikz} \\ &= -M_0 f(a) \left[\frac{\delta(k - q) - \delta(k + q)}{2i} \right]\end{aligned}\quad (38)$$

La condición de salto, usando la forma (25) para Φ , implica

$$A(k) = -4\pi a M_0 f(a) \left[\frac{\delta(k - q) - \delta(k + q)}{2i} \right] \quad (39)$$

Siempre que hay deltas, las integrales pueden hacerse de manera inmediata. Volviendo al desarrollo (25) para el potencial, encontramos

$$\begin{aligned}\Phi_a(\rho, z) &= \\ &= -4\pi a M_0 f(a) \int_{-\infty}^{\infty} dk \left[\frac{\delta(k - q) - \delta(k + q)}{2i} \right] e^{ikz} I_0(|k|\rho_<) K_0(|k|\rho_>),\end{aligned}\quad (40)$$

y no es casualidad que recuperemos la función $\sin qz$ de la cual partimos, ya que, al hacer la integral, teniendo en cuenta que $q > 0$, queda:

$$\begin{aligned}\Phi_a(\rho, z) &= -4\pi a M_0 f(a) \frac{e^{iqz} - e^{-iqz}}{2i} I_0(q\rho_{<}) K_0(q\rho_{>}) \\ &= -4\pi a M_0 f(a) \sin qz I_0(q\rho_{<}) K_0(q\rho_{>}).\end{aligned}\quad (41)$$

Aun hay una tercera forma, probablemente la más simple de todas, de operar con los desarrollos de Fourier. Consiste en observar que todas las fuentes son proporcionales al $\sin qz$, que es la parte imaginaria de e^{iqz} . Así, por ejemplo, en lugar de la densidad real (2) podría haberse trabajado con una densidad compleja

$$\sigma_a(z) = -M_0 f(a) e^{iqz}, \quad (42)$$

en la inteligencia de que al final del cálculo hay que tomar la parte imaginaria del potencial Φ_a generado por esta densidad. Esta forma de σ_a , combinada con un desarrollo de Fourier del tipo (25), permitía una comparación inmediata entre los desarrollos del salto de la derivada de Φ_a y el de σ_a .

■ APROVECHAREMOS también para ver qué pasa con la contribución al potencial que viene de las cargas en volumen si la elección de f se mantiene en suspenso. Aunque se puede usar la función de Green, sería preferible poder usar los resultados que ya tenemos para las densidades superficiales.

Viendo lo que hicimos para las contribuciones Φ_a y Φ_b , en el caso de una densidad superficial genérica en $\rho = r$ [aquí usamos r como si fuera la coordenada radial en cilíndricas], del tipo

$$\sigma_r(z) = \sigma_r \sin qz, \quad (43)$$

el potencial asociado sería

$$\Phi_r(\rho, z) = 4\pi\sigma_r r I_0(q\rho_{<}) K_0(q\rho_{>}) \Big|_r \sin qz. \quad (44)$$

La ventaja de contar con esta expresión es que la densidad volumétrica $\rho_V = -\nabla \cdot \mathbf{M}$ puede pensarse como infinitas densidades superficiales

entre $\rho = a$ y $\rho = b$, todas con la forma genérica (43), cada una sobre la superficie de un cilindro de espesor dr . Cada uno de estos cilindros de espesor infinitesimal tendrá una densidad superficial dada por

$$d\sigma_r(z) = \rho_V(r, z)dr = M_0 \left[q - \frac{1}{r}(rf)' \right] \sin qz \, dr, \quad (45)$$

y la contribución neta al potencial es la integral de todas las contribuciones infinitesimales, con la forma genérica (44), entre a y b :

$$\Phi_V(\rho, z) = 4\pi M_0 \left\{ \int_a^b dr \left[q - \frac{1}{r}(rf)' \right] I_0(q\rho_{<})K_0(q\rho_{>}) \Big|_r \right\} \sin qz. \quad (46)$$

Esto resuelve lo que nos habíamos propuesto: escribir la contribución de las cargas en el volumen usando los potenciales que habíamos obtenido para las cargas en superficie. La idea del problema era no tener que hacer esta integral. Tampoco era necesario escribir la expresión anterior para Φ_V . Bastaba con darse cuenta desde el principio de que la contribución de volumen podía anularse eligiendo f adecuadamente.



Problema 4

David Blanco*

Decidir si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa. Justificar.

1. *Toda distribución de carga con simetría azimutal tiene todos sus momentos multipolares nulos, con excepción, a lo sumo, del monopolar.*

Esta afirmación es FALSA. Bastaba con dar un contraejemplo, que bien podía ser la distribución de carga de polarización inducida sobre el dieléctrico del problema 2. Tal distribución tenía simetría azimutal, y sin embargo el potencial que generaba Φ_e tenía momento dipolar no nulo. Otro ejemplo sencillo podría haber sido un dipolo perfecto en la dirección z (la distribución de carga es $\rho(\mathbf{r}) = -\mathbf{p} \cdot \bar{\nabla} \delta(\mathbf{r}) = -p \frac{\partial}{\partial z} \delta(\mathbf{r})$, que tiene claramente simetría azimutal, y el potencial es el de un dipolo, cuyo término dipolar es naturalmente no nulo).

2. *Sea $G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ la función de Green con condiciones de contorno de Dirichlet en un volumen V acotado. Entonces, vale que $G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') < \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$ (Ayuda: recordar que $G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} + \Lambda(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, con $\bar{\nabla}^2 \Lambda = 0$).*

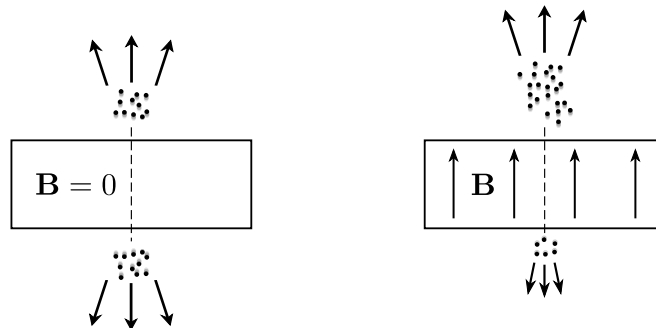
Esta afirmación es VERDADERA. $G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ es el potencial que genera una carga puntual de valor $q = 1$ ubicada en \mathbf{r}' , con la condición de potencial nulo en el borde ∂V de V . Tal potencial puede escribirse como la suma $\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} + \Lambda(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$. El primer término de tal suma representa el potencial de la carga puntual $q = 1$ en el espacio libre (sin

* dblanco@iafe.uba.ar

condiciones de contorno), mientras que el segundo término (que satisface la ecuación de Laplace en el interior de V) representa el potencial que generan en el punto \mathbf{r} las cargas inducidas sobre la frontera ∂V . Como $q > 0$, tal distribución de carga inducida debe ser negativa y entonces el potencial que genera también lo es. Es decir, $\Lambda(\mathbf{r}, \mathbf{r}') < 0$. Por lo tanto, $G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') < \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$.

Otra forma de demostrar la veracidad de la afirmación es la siguiente. $\Lambda(\mathbf{r}, \mathbf{r}')|_{\partial V} = -\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}|_{\partial V} < 0$. Como $\Lambda(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ es una función armónica en V (tiene laplaciano nulo), por el principio del máximo¹, debe alcanzar sus valores mínimos y máximos en el borde ∂V de V . Luego, como $\Lambda(\mathbf{r}, \mathbf{r}')|_{\partial V} < 0$, resulta $\Lambda(\mathbf{r}, \mathbf{r}') < 0$ en todo V y se obtiene entonces que $G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') < \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$.

3. *La máquina de la figura es simétrica respecto del plano indicado por la línea de trazos. En su interior hay un campo magnético estático y uniforme \mathbf{B} . Dentro de la máquina hay una fuente isotrópica de partículas que pueden escapar por cualquiera de los dos extremos. La figura muestra que, cuando $\mathbf{B} \neq 0$, salen más partículas a través de un extremo que del otro. Se puede afirmar, entonces, que las únicas interacciones que sufren las partículas son debidas al campo magnético (Ayuda: reflejar el experimento).*



Esta afirmación es FALSA. Para ver esto, podemos pensar en reflejar

¹El principio del máximo es un teorema que pide además que V sea una región conexa. Esto no es un problema, dado que si la región no fuera conexa, las partes de V en donde no se encuentra la carga $q = 1$ (al tener sus bordes a potencial cero) tienen potencial nulo.

el experimento respecto del plano de simetría indicado en la figura. La trayectoria de las partículas será la misma, puesto que sus posiciones y velocidades son vectores. Es decir, en el experimento reflejado seguiremos teniendo más partículas saliendo por el extremo superior. Sin embargo, el campo reflejado invierte su dirección. Tenemos entonces dos situaciones en las que el comportamiento de las partículas respecto al campo es diferente (y noten que cuando el campo es nulo, el aparato no hace diferencia entre las partículas que salen hacia arriba y hacia abajo). Esto nos indica que las partículas deben sufrir algún otro tipo de interacción aparte de la debida a **B**.