Desarrollo multipolar.

1 (a) Probar que los momentos multipolares de una distribución de carga con simetría esférica son nulos salvo el monopolar.

(b) Probar que el momento dipolar de una distribución de carga neutra no depende del origen. En general, probar que el primer momento multipolar no nulo es independiente del origen.

(c) Encontrar las expresiones para los momentos multipolares (en esféricas) de una distribución con simetría azimutal y escribir la expansión correspondiente.

2 Analizar los momentos multipolares, hasta el cuadrupolar, de las siguientes distribuciones de carga, y en el caso de tener momento cuadrupolar determinar sus ejes principales:

(a) Un anillo de radio a cargado uniformemente con carga total Q.

(b) Un disco cargado con una distribución cilíndricamente simétrica respecto de su eje.

(c) Un cubo uniformemente cargado en volumen. Estimar el error en el **campo eléctrico** si a un cubo de 10 cm de lado se lo considera como una carga puntual a distancias del orden de 1 m de su centro. ¿A qué distancia el error es del orden del 1 %?

3 Calcule todos los momentos multipolares del problema 2 de la Guía 2 (anillo de radio b, cargado uniformemente, concéntrico con una esfera a tierra de radio $a < b$).

4* (Carnaval de índices del terror.) Para una distribución de carga acotada, lejos del sistema de cargas el campo puede desarrollarse en potencias de $1/r$ a partir de la integral de Poisson,

$$\Phi(\mathbf{r}) = \int_V d^3\mathbf{r}' \, \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \int_V d^3\mathbf{r}' \, \frac{\rho(\mathbf{r}')}{r}\left[1 + \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}'}{r^2} + \dots\right] = \Phi_1(\mathbf{r}) + \Phi_2(\mathbf{r}) + \Phi_3(\mathbf{r}) + \dots$$

Los primeros términos se escriben como

$$\Phi_1(\mathbf{r}) = \frac{Q}{r}, \quad \Phi_2(\mathbf{r}) = \frac{r_i p_i}{r^3}, \quad \Phi_3(\mathbf{r}) = \frac{r_i r_j Q_{ij}}{2\, r^5},$$

donde $Q = \int d^3\mathbf{r}\, \rho(\mathbf{r}), \;\; p_i = \int d^3\mathbf{r}\, \rho(\mathbf{r}) r_i, \;\; Q_{ij} = \int d^3\mathbf{r}\, \rho(\mathbf{r}) \left(3 r_i r_j - \delta_{ij} r^2\right)$. Aquí los r_i son las componentes cartesianas del vector $\mathbf{r}$. Sería bueno que antes de seguir con el ejercicio, deduzca por su cuenta el término cuadrupolar Φ_3, junto con el tensor Q_{ij}.

Continúe el desarrollo de Φ hasta los dos órdenes siguientes, es decir, hasta términos de orden $1/r^5$. El resultado debe escribirse en la forma

$$\Phi_4(\mathbf{r}) = \frac{r_i r_j r_k \, Q^{(3)}_{ijk}}{3!\, r^7}, \qquad \Phi_5(\mathbf{r}) = \frac{r_i r_j r_k r_l \, Q^{(4)}_{ijkl}}{4!\, r^9},$$

donde los tensores $Q^{(n)}_{ij\dots}$ son completamente simétricos, y además $Q^{(n)}_{\boldsymbol{i}j\dots\boldsymbol{i}k\dots} = 0$ para la suma sobre cualquier par de índices (¿por qué?). ¿Cuántos elementos independientes tiene un tensor de este tipo? Luego, calcule hasta el primer orden no nulo (además del monopolar) el potencial de un cubo macizo cargado y revea el problema 2(c).

5* **¿Es lo mismo tener una gran distribución de carga lejos que una pequeña distribución cerca?** Calcular la densidad ρ_α de una distribución de carga ρ que se ha expandido o contraído uniformemente un factor α. Expansión significa $\alpha > 1$, y contracción, $0 < \alpha < 1$. Geométricamente, la transformación lleva el punto $\mathbf{r}$ al punto $\alpha\mathbf{r}$, y la carga contenida en el elemento de volumen $d^3\mathbf{r}$ al elemento de volumen $d^3(\alpha\mathbf{r})$. ¿Cuál es el potencial Φ_α de la distribución transformada en términos del potencial original Φ? ¿Cómo se relacionan entre sí los momentos multipolares de orden l, $Q_\alpha^{(lm)}$, de la distribución transformada y los momentos $Q^{(lm)}$ de la original? Volviendo a la pregunta inicial: ¿en qué sentido es equivalente ver una distribución desde una distancia $L = \alpha d$, con $\alpha > 1$, a verla desde una distancia d pero contraída un factor $1/\alpha$?

Respuestas: $\rho_\alpha(\mathbf{r}) = \alpha^{-3}\rho\left(\frac{\mathbf{r}}{\alpha}\right)$, $\Phi_\alpha(\mathbf{r}) = \alpha^{-1}\Phi\left(\frac{\mathbf{r}}{\alpha}\right)$, $Q_\alpha^{(lm)} = \alpha^l Q^{(lm)}$.

Medios materiales

$\boxed{6}$ Una esfera conductora de radio a está a potencial cero. Entre $r = a$ y $r = b$ hay un dieléctrico de permitividad ε, y ubicada a una distancia r' del origen hay una carga q. Considerar separadamente los dos casos $a < b < r'$ y $a < r' < b$.

(a) Hallar el potencial electrostático en todo punto del espacio.

(b) Hallar las densidades de carga de polarización en volumen y superficie, y las densidades de carga libre en todo el espacio.

(c) Analizar los casos $\varepsilon = 1$ y $\varepsilon \to \infty$.

Ayuda: usando la forma genérica del potencial de una cáscara cargada frente a una esfera (que puede deducirse en una línea), bastará plantear una sola ecuación con una sola incógnita. En otro caso tendrá que plantear 5 ecuaciones con 5 incógnitas.

$\boxed{7}$ Una esfera homogénea de radio a tiene permitividad ε y es concéntrica con una cáscara esférica con densidad de carga $\sigma = \sigma_0 \cos\theta$ y radio b. El conjunto se halla sumergido en un campo eléctrico uniforme en el infinito, $\mathbf{E} = E_0\,\hat{z}$. Analizando por separado los casos $a < b$ y $b < a$:

(a) calcular el potencial en todo punto del espacio.

(b) hallar la distribución de cargas de polarización en volumen y en superficie.

¿Coinciden los límites $b \to a^+$ y $b \to a^-$?

$\boxed{8}$ Un medio dieléctrico de permitividad ε ocupa el semiespacio con $z < 0$. A una altura $d > 0$ sobre el dieléctrico hay una carga q.

(a) Encuentre el potencial electrostático en todo el espacio: (i) usando separación de variables en coordenadas cartesianas, y (ii) usando separación de variables en coordenadas cilíndricas.

(b) Para cada una de las expresiones obtenidas en (a), identifique la contribución al potencial asociada exclusivamente a la carga q. Es decir, escriba $\phi = \phi_q + \phi_r$, donde ϕ_q es el potencial de la carga original. ¿A qué simple distribución de cargas puntuales puede atribuirse, en cada región, la parte restante del potencial, ϕ_r?

(c) ¿A qué se reduce la solución cuando $\varepsilon \to \infty$? ¿Cuál es la interpretación física de este resultado?

(d) Generalice los resultados anteriores al caso en que el semiespacio superior está ocupado por un medio con permitividad ε_1 y el inferior por un medio con permitividad ε_2. En términos de las permitividades, ¿cuál es la magnitud que caracteriza al problema?

(e) Encuentre la función de Green para todo el espacio según las condiciones del ítem anterior. (Notar que la carga puede estar en cualquier posición, por encima y por debajo del plano $z = 0$.)

9 **Imán esférico.** Una esfera de radio a está uniformemente magnetizada con densidad $\mathbf{M} = M\hat{z}$.

(a) Calcular los campos $\mathbf{B}$ y $\mathbf{H}$ usando la integral de Poisson para el potencial escalar magnético $\Phi_{\mathbf{H}}$, continuo en todo el espacio y tal que $-\nabla\Phi_{\mathbf{H}} = \mathbf{H}$. Identificar el problema eléctrico equivalente. Comparar el potencial en el exterior de la esfera con el que produciría un dipolo magnético puntual igual al momento dipolar total de la esfera.

(b) Calcular el potencial escalar magnético $\Phi_{\mathbf{H}}$ usando ahora separación de variables en esféricas.

(c) Calcular el potencial vector $\mathbf{A}$ mediante la integral de Poisson y, a partir de ahí, $\mathbf{B}$ y $\mathbf{H}$.

(d) La misma esfera magnetizada está ahora situada en un medio lineal, isótropo y homogéneo de permeabilidad μ, que se extiende entre $r = a$ y $r = b > a$, concéntrico con la esfera. Calcule los campos $\mathbf{B}$ y $\mathbf{H}$ en todo el espacio y encuentre el momento magnético total $\mathbf{m}$ inducido en el medio. Verifique que para $\mu = 1$ se obtienen los resultados de los ítems anteriores.

10 **Imán cilíndrico.** Un cilindro de radio a y longitud L está orientado según la dirección z, con sus tapas en $z = \pm L/2$, y está caracterizado por una densidad de magnetización uniforme $\mathbf{M} = M\,\hat{z}$.

(a) Calcular los campos $\mathbf{B}$ y $\mathbf{H}$ a partir de un potencial escalar magnético $\Phi_{\mathbf{H}}$, continuo en todo el espacio y tal que $-\nabla\Phi_{\mathbf{H}} = \mathbf{H}$. Escribir $\Phi_{\mathbf{H}}$ como un desarrollo en las funciones de Bessel $J_\nu(k\rho)$ o como una integral de Fourier en z.

(b) ¿A qué distribución de corriente es equivalente este imán?

(c) A partir del campo del imán, calcular el campo $\mathbf{B}$ producido por un solenoide cilíndrico, de radio a y longitud L, por el que circula una corriente I y que tiene n espiras por unidad de longitud.

(d) Calcular explícitamente los campos $\mathbf{B}$ y $\mathbf{H}$ del imán cuando $L \to \infty$.

(e) Demuestre, por analogía, que el campo magnético de un solenoide infinito de sección arbitraria es cero en su exterior y constante en su interior.

11 **Imán Borgeano.** Aquí se les propone el caso de un imán con magnetización no uniforme, limitado por los planos $z = 0$ y $z = d$. En las direcciones x e y se extiende entre $-\infty$ y $+\infty$. La densidad de magnetización dentro del imán está dada por

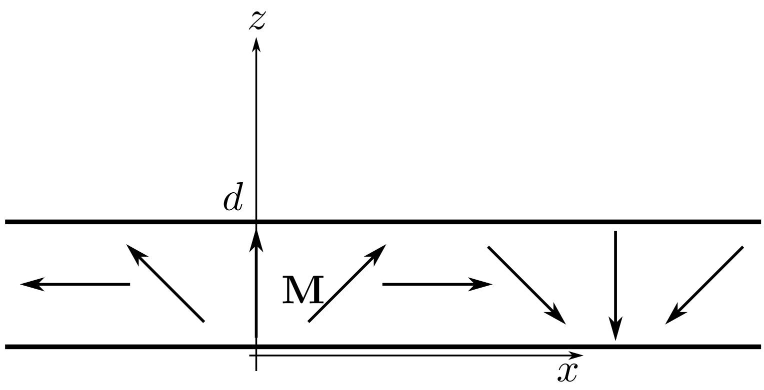
$$\mathbf{M}(x) = m_0\,(\mathrm{sen} qx\,\hat{x} + \cos qx\,\hat{z})\,,$$

con $q > 0$. Es decir, según un corte en el plano xz, la magnetización va rotando como en la figura: Puesto que la magnetización es permanente y conocida en todo el espacio, el paso a un problema electrostático equivalente es el camino más sencillo. Pero como $\mathbf{M}$ no es uniforme, puede haber cargas superficiales y de volumen,

$$\sigma = (\mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2)\cdot\mathbf{n}, \qquad \rho = -\nabla\cdot\mathbf{M}.$$

Lo que tienen que hacer es calcular el potencial escalar para el campo $\mathbf{H}$ y el campo magnético en todo el espacio, pero especialmente en las regiones por encima y por debajo del imán. No se preocupen tanto por la región intermedia. Van a tener que integrar la función de Green para cada contribución.

Algunas observaciones:



- La solución es una expresión cerrada que no incluye sumatorias ni integrales. Todo se puede trabajar hasta el final. No es un problema complicado. Sean prolijos.
- Cuando tengan la solución, hagan un poco de ingeniería inversa: deduzcan a posteriori qué tipo de cosas podrían haber deducido a priori. Esto, en algunos ámbitos, recibe el nombre de *mixtificación*, o también *trampa*, pero en física suele ser el camino normal cuando uno se enfrenta a problemas nuevos. Con la solución a la vista, súbitamente se vuelven triviales varias cosas, y entonces pueden dar una solución más compacta y razonada.
- Si el resultado no les parece desconcertante, es que hicieron algo mal o que no tienen corazón.

Por fin, ¿dónde está lo borgeano de este imán? Hay todo un cuento, pero sería muy simple si uno se los indicara. En cambio, descubran ustedes en qué línea del poema *La cierva blanca*, escrito en riguroso sistema de unidades cgs, se esconde una referencia borgeana al imán que acabamos de describir:

¿De qué agreste balada de la verde Inglaterra,
de qué lámina persa, de qué región arcana
de las noches y días que nuestro ayer encierra,
vino la cierva blanca que soñé esta mañana?
Duraría un segundo. La vi cruzar el prado
y perderse en el oro de una tarde ilusoria,
leve criatura hecha de un poco de memoria
y de un poco de olvido, cierva de un solo lado.
Los númenes que rigen este curioso mundo
me dejaron soñarte pero no ser tu dueño;
tal vez en un recodo del porvenir profundo
te encontraré de nuevo, cierva blanca de un sueño.
Yo también soy un sueño fugitivo que dura
unos días más que el sueño del prado y la blancura.

$\boxed{12}$ **"Uno más, y no jodemos más...": Imán de parcial.** Un imán ocupa la región $0 \leq z \leq d$ y su densidad de magnetización es

$$\mathbf{M}(\rho, \varphi, z) = \alpha J_1(q\rho)\,\hat{\rho}(\varphi) + \beta J_0(q\rho)\,\hat{z} \qquad (\text{con}\ \ q > 0).$$

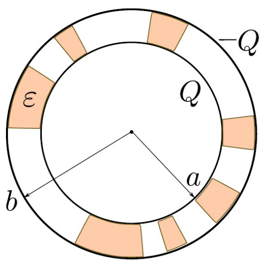
(a) Encontrar **B** y **H** en el **exterior** del imán. El resultado puede quedar escrito en términos del rotor o del gradiente de un potencial. No es necesario calcular explícitamente **B** y **H**.

(b) ¿Qué relación deben cumplir los parámetros del problema para que el campo **B** se anule por debajo del imán?

13* **Problema sin cuentas I.** Las esferas de la figura tienen radios a y b, son conductoras y están aisladas. El espacio entre ellas está parcialmente ocupado por un dieléctrico de permitividad ε. Sólo una fracción x del volumen entre las esferas está ocupado por el dieléctrico. Los espacios vacíos empiezan en una esfera y terminan en la otra, no son uniformes y se extienden por trechos al azar, pero se caracterizan por tener sus paredes orientadas según la dirección radial. Sobre la esfera de radio a se deposita una carga libre Q, y sobre la de radio b una carga libre $-Q$. Sólo se conocen los valores de estas cargas, no cómo se distribuyen.

(a) Demuestre que un campo eléctrico con simetría esférica es compatible con las condiciones de contorno sobre todas las interfases. De las hipótesis formuladas en el enunciado, ¿cuál es la que resulta fundamental para poder afirmar lo anterior?

(b) Encuentre los campos **E** y **D** en la región entre las dos esferas y las distribuciones de carga libre y de polarización.



14* **Problema sin cuentas II.** Una corriente I fluye por un cable delgado a lo largo del eje z (ver figura). Tres semiplanos que forman entre sí ángulos α_1, α_2 y α_3 ($\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 2\pi$) se intersectan a lo largo de ese eje. Las regiones entre los planos tienen permeabilidades μ_1, μ_2 y μ_3. Demuestre que un campo magnético con simetría cilíndrica es compatible con todas las condiciones del problema. Físicamente, ¿cuál es el motivo? Encuentre **B** y **H** en todo el espacio.