1 Una partícula no relativista de carga Ze, masa m y energía cinética inicial $\mathcal{E}$ incide frontalmente desde el infinito sobre un centro de fuerzas fijo en el origen. La interacción es repulsiva y está descripta por un potencial $V(r)$ que es mayor que $\mathcal{E}$ a distancias suficientemente cercanas al origen y que decae a cero en el infinito.

(a) Mostrar que la energía total radiada está dada por

$$\Delta W = \frac{4}{3}\frac{Z^2e^2}{m^2c^3}\sqrt{\frac{m}{2}}\int_{r_{\min}}^{\infty} dr\, \frac{V'(r)^2}{\sqrt{V\left(r_{\min}\right) - V(r)}},$$

donde $r_{\min}$ es la distancia de máximo acercamiento al centro de fuerzas. (Jackson)

(b) Si la interacción es Coulombiana, $V(r) = ZZ'e^2/r$, mostrar que la energía total irradiada es

$$\Delta W = \frac{8}{45}\frac{Zmv_0^5}{Z'c^3},$$

donde v_0 es la velocidad de la carga incidente en el infinito. (Jackson)

(c) Como caso particular, considerar un positrón que incide sobre un protón. Si la velocidad inicial del positrón en el infinito es v_0, estimar su velocidad final como resultado de la perdida de energía por radiación, despreciando el movimiento del protón. ¿Cómo está polarizada la radiación? Despreciando ahora los efectos de la pérdida de energía por radiación, pero teniendo en cuenta la masa finita del protón, estimar la velocidad final del positrón. Compare los dos resultados para la velocidad final.

2 Este problema es la versión relativista del anterior. Una partícula relativista de carga q y masa m que se mueve sobre el eje x incide sobre una partícula de carga Q fija en el origen. Las dos cargas tienen el mismo signo. Inicialmente, en $x \to \infty$ y $t \to -\infty$, la partícula de masa m está caracterizada por un factor relativista γ_0.

(a) Demuestre primero que para una partícula de masa m y carga q

$$m\gamma(\mathbf{v})\dot{\mathbf{v}} = q\Big[\mathbf{E} + \boldsymbol{\beta}\times\mathbf{B} - (\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{E})\,\boldsymbol{\beta}\Big].$$

Esta fórmula se usa mucho en los problemas relativistas para obtener $\dot{\mathbf{v}}$.

(b) Encuentre x como función de γ. ¿Cuál es la distancia de máximo acercamiento?

(c) Encuentre $\dot{v}$ como función de γ.

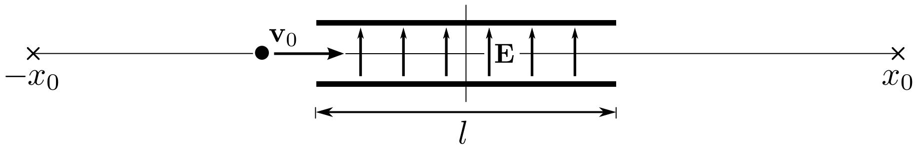
(d) Encuentre $\dot{\gamma}$ como función de γ.

(e) Escriba la potencia radiada como función de γ.

(f) Escriba la energía total radiada como una integral, $\Delta W = \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} d\gamma\, f(\gamma)$, dando los valores de γ_1, γ_2 y la función f en términos de los datos del problema.

3 Una partícula relativista de carga q y masa m pasa a través de un capacitor de placas paralelas de longitud l. El campo $\mathbf{E}$ en el interior del capacitor es homogéneo y constante. La partícula ingresa al capacitor con una velocidad $\mathbf{v}_0$ perpendicular a $\mathbf{E}$ y paralela a las placas, y viaja tan rápido que su desviación puede despreciarse.

(a) Calcule la energía total irradiada durante el paso de la partícula por el capacitor.



(b) Escriba la expresión del campo eléctrico de **radiación** y grafíquelo cualitativamente en función del tiempo para los puntos $-x_0$ y x_0, que se encuentran sobre la línea que sigue la partícula, simétricos respecto del centro del capacitor y **muy alejados** de éste. Tenga especial cuidado en el cálculo de los intervalos temporales en que ese campo es distinto de cero.

$\boxed{4}$ Ídem al problema anterior, pero ahora dentro del capacitor hay un campo eléctrico estático cuyo potencial es

$$\Phi(x,z) = \frac{E_0}{k}\, e^{-kz}\mathrm{sen}kx,$$

donde $k = 8\pi/l$. La velocidad de la partícula es tan alta que apenas se desvía, por lo que su trayectoria puede tomarse igual a $\mathbf{r}(t) = (vt - l/2)\,\hat{x}$.

(a) Calcular y **graficar** el campo eléctrico de **radiación** en función del tiempo en $\pm\mathbf{r}_0 = \pm x_0\,\hat{x}$, donde $l \ll x_0$.

(b) Calcular la potencia por unidad de ángulo sólido en función del tiempo, y la energía total por unidad de ángulo sólido recibida en $\pm\mathbf{r}_0$. Asumir, como antes, que $l \ll x_0$.

$\boxed{5}$ (a) Una partícula de carga $-e$ y masa m gira alrededor de otra mucho más pesada de carga Ze. El radio de la órbita circular es inicialmente R. Calcular el tiempo que tarda la partícula más liviana en caer al centro debido a la pérdida de energía por radiación, y calcular el número de vueltas que realiza antes de caer. Asumir que el movimiento es no relativista y que la energía radiada por ciclo es mucho menor que la energía potencial de la partícula en movimiento circular. Recordar que para una órbita circular en un potencial atractivo de la forma $-\alpha/r$, la energía total (sin considerar la energía en reposo mc^2) es igual a 1/2 de la energía potencial.

(b) Calcular el tiempo de caída y el número de vueltas en el caso de un electrón orbitando alrededor de un protón. Inicialmente el electrón se mueve en una órbita circular correspondiente al radio de Bohr. Datos: $m_e c^2 = 511$ keV, energía de ionización = 13,6 eV, radio de Bohr = $5{,}3 \times 10^{-11}$ m, $c = 3 \times 10^8$ m/s. ¿Qué falla primero, la aproximación no relativista o la aproximación de energía radiada por ciclo mucho menor que la energía potencial?

$\boxed{6}$ Para todos los sistemas que se enumeran más abajo:

- Calcular los campos de radiación **E** y **B** hasta orden dipolar magnético y cuadrupolar eléctrico.
- Graficar cualitativamente **E** y **B** sobre la superficie de una esfera.
- Calcular la potencia por unidad de ángulo sólido y graficar su promedio temporal en función de la dirección.
- Calcular la potencia total emitida en todas las direcciones y su promedio temporal.
- Indicar la frecuencia angular de la radiación emitida.

(a) Una carga q que gira en una órbita circular de radio a y frecuencia angular ω.

(b) Dos cargas q y $-q$ que giran en el plano xy con frecuencia angular ω, separadas una distancia d.

(c) Ídem al anterior pero ahora para dos cargas iguales de valor q.

(d) Un anillo circular cuyo radio es una función del tiempo $a(t) = r_0 \cos^2 \omega t$. El anillo tiene carga q distribuida uniformemente.

(e) Un dipolo magnético $\mathbf{m}$ que rota con velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$. El ángulo entre $\mathbf{m}$ y $\boldsymbol{\omega}$ es α.

7 **"Magnetars"**. El pulsar SGR 1806-20 rota con un período $T = 7{,}5$ s. En su superficie esto representa una velocidad de 30000 km/h. La velocidad de frenado de esta rotación es inusualmente alta en términos astronómicos, siendo $\dot{T} = 8 \times 10^{-11}$. Calcule el máximo campo magnético sobre la superficie del pulsar, asumiendo que su masa y su radio son los típicos de este tipo de estrellas ($m = 1{,}4 M_\odot = 2{,}8 \times 10^{30}$ kg, $r = 10$ km) y que el frenado en la rotación se produce debido a la pérdida de energía por radiación. Suponga además que la velocidad angular es perpendicular al momento magnético de la estrella. [K. T. McDonald, "Magnetars", Am. J. Phys. **68** (2000) 775.]

8 Una extensión del problema anterior: cuántas ciudades como Buenos Aires podrían iluminarse con la energía que emite la Tierra debido a la rotación diurna de su momento magnético. Relacionar el resultado con el peso de una pulga en la Luna.

9 La corriente superficial sobre el plano xy es cero para $t < 0$ y vale $\kappa\,\hat{x}$ para $t > 0$. La densidad de carga es cero en todo el espacio. A partir de los potenciales retardados, encuentre los campos $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$ para todo tiempo.

10* **Relación entre la aproximación multipolar y las correcciones relativistas.** Una partícula cargada efectúa un movimiento circular uniforme con frecuencia angular ω y radio a. Los campos de radiación se observan desde un punto $\mathbf{R}$ tal que $R \gg a$. Entiéndase por campo de radiación la expresión $\frac{1}{R} \lim_{R\to\infty} R\, \mathbf{E}(\mathbf{R}, t)$, y lo mismo para $\mathbf{B}$, manteniendo $t_R = t - R/c$ constante. (¿Cuál es la lógica de esta definición?)

(a) A partir de las fórmulas generales de los campos $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$ de una carga en movimiento arbitrario, calcular los campos de radiación hasta orden ω^3. Tenga en cuenta que necesitará calcular el tiempo retardado hasta orden a/c en el límite en que $R \to \infty$.

(b) Encontrar los campos de radiación hasta el mismo orden en ω, pero esta vez calculando las contribuciones de los términos de radiación multipolares hasta el orden que sea necesario.

(c) Comparar los dos resultados.

(d) A partir de los campos de radiación, calcular la potencia radiada y comparar con las fórmulas generales del desarrollo multipolar [por ejemplo, Landau ec. 71.5].