$\boxed{1}$ **Dada una batería esférica**... Una esfera de radio a y conductividad σ está rodeada por un medio infinito de conductividad σ'. Dentro de la esfera hay una fuerza uniforme en la dirección z que actúa sobre los portadores de carga y que tiene el mismo efecto que un campo eléctrico de intensidad F. En el régimen **estacionario** existen corrientes y campos eléctricos tanto dentro como fuera de la esfera y aparece una distribución de carga sobre su superficie.

(a) Encontrar el campo eléctrico y la densidad de corriente en todo el espacio. Determinar la densidad de carga sobre la superficie de la esfera y calcular su momento dipolar.

(b) Calcular $\mathbf{B}$ en todo el espacio. (Note que la densidad de corriente tiene la misma forma que el campo magnético de un problema ya muchas veces visto, y cuyo $\mathbf{A}$ es sencillo de obtener.)

(c) Encontrar la corriente total I que egresa de la esfera. Es decir, sólo la asociada con aquellos puntos en donde $\mathbf{j} \cdot \hat{r} > 0$.

(d) Calcular la potencia P disipada en el medio exterior. Procediendo por analogía con la relación $P = I^2 R$, ¿cuál es la resistencia efectiva del medio exterior?

Referencia: Jackson, *Classical Electrodynamics*, 3ra. ed., problema 3.15.

$\boxed{2}$ Un conductor de conductividad σ ocupa el semiespacio $z > 0$ y una corriente I ingresa perpendicularmente al mismo desde la región $z < 0$ por el punto $(x, y, z) = (0, 0, 0)$. El régimen es **estacionario**. Hallar el potencial en el conductor.

$\boxed{3}$ Una esfera tiene radio a y conductividad σ. Una corriente I ingresa perpendicular a la esfera por un punto A, y egresa por un punto B diametralmente opuesto. El régimen es **estacionario**. Encontrar el potencial dentro de la esfera. Si resuelve el problema usando separación de variables en coordenadas esféricas, obtendrá una suma infinita. Esa suma puede resolverse explícitamente operando a partir de los desarrollos

$$\frac{1}{\sqrt{1 + x^2 \pm 2xy}} = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(y)\,(\pm x)^l.$$

Verificar la consistencia del resultado hallado con el del ejercicio anterior (lo mismo que pasa en el semiespacio con interfase plana, debe suceder suficientemente cerca de un cable que entra a un conductor de forma arbitraria).

Referencias: Landau y Lifshitz, *Electrodynamics of continuous media*, §**21** en la versión en inglés, o §**20** en la versión española; en ambos casos, Problema 2 al final de la sección, resuelto por medios esotéricos.

$\boxed{4}$ Una cáscara esférica maciza tiene radio interior a y exterior b, y está caracterizada por una conductividad σ, una constante dieléctrica ϵ y una permeabilidad μ. Sobre la cara interior de la cáscara se ha depositado una densidad superficial de carga uniforme Σ. Si a $t = 0$ se permite que el sistema evolucione:

(a) Usando argumentos de simetría, ¿cuánto vale $\mathbf{B}$ en todo el espacio y para todo t? ¿Qué simetría tiene el campo eléctrico?

(b) Teniendo en cuenta lo anterior, encontrar la forma que adoptan las ecuaciones de Maxwell dentro y fuera del conductor.

(c) Encontrar el campo eléctrico, la densidad de corriente y la densidad de carga (superficial y de volumen) en función del tiempo.

(d) Encontrar la evolución de la energía de los campos en función del tiempo y demostrar que la variación de energía entre $t = 0$ y $t = \infty$ es igual a la energía disipada por efecto Joule.

$\boxed{5}$ Un conductor cilíndrico infinito tiene radio interior a y exterior b, está caracterizado por una conductividad σ, una constante dieléctrica ϵ y una permeabilidad μ. Sobre la cara interior del conductor se ha depositado una densidad superficial de carga uniforme Σ. Si a $t = 0$ se permite que el sistema evolucione:

(a) Encontrar $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ y $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ en todo el espacio para $t \geq 0$.

(b) Encontrar las distribuciones de carga (libre y de polarización) y de corriente (libre y de magnetización) para $t \geq 0$.

(c) Mostrar que se cumple el teorema de Poynting $\frac{d}{dt}\left(\int_{\mathrm{V}} d^3\mathbf{r}\ u\right) + \int_{\mathrm{V}} d^3\mathbf{r}\ \mathbf{J}\cdot\mathbf{E} = -\oint_{\mathrm{S}} d^2r\ \mathbf{S}\cdot\mathbf{n}$, donde $u = \frac{1}{8\pi}\left(\mathbf{E}\cdot\mathbf{D} + \mathbf{H}\cdot\mathbf{B}\right)$, $\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi}\mathbf{E}\times\mathbf{H}$, y donde el volumen V es un volumen cilíndrico de radio $R > b$ y altura L, coaxial con el conductor.

$\boxed{6}$ En el semiespacio conductor $z > 0$ de conductividad σ circula una densidad de corriente $j(z)\cos(\omega t)\,\hat{e}_x$ que da lugar a una corriente por unidad de longitud $\kappa\,\hat{e}_x$ (en este caso particular, tenemos $\kappa = \int_0^\infty j(z)\cos(\omega t)dz$). En la aproximación cuasiestacionaria, calcular:

(a) Los campos $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$ en el interior del conductor.

(b) Encontrar la potencia media disipada y la corriente superficial efectiva (ambas por unidad de longitud).

$\boxed{7}$ Por un conductor cilíndrico, macizo, de radio a, $\mu = \epsilon = 1$ y conductividad σ circula una corriente alterna del tipo $I = I_0\cos(\omega t)$. La distribución de la corriente dentro del conductor **no** puede asumirse conocida, sino que debe encontrarse de manera consistente con las ecuaciones de Maxwell. Bajo la aproximación cuasiestacionaria (i.e. despreciar el término de corriente de desplazamiento), calcular:

(a) Los campos $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$ en el interior del conductor.

(b) Estudie los casos límites de la distribución de $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ cuando $\delta/a \gg 1$ y $\delta/a \ll 1$, donde δ es el espesor pelicular o "skin depth".

(c) Encontrar la potencia media disipada y la resistencia efectiva en los casos límites, y, en el caso del espesor pelicular mucho menor que a, la corriente superficial efectiva.

(d) Calcular numéricamente y graficar la resistencia vs. la frecuencia en el caso general.

Referencia: Landau y Lifshitz, *Electrodynamics of continuous media*, §**60** [The skin effect] en la versión en inglés; §**46**, [Efecto pelicular] en la edición española de ed. Reverté.

$\boxed{8}$ *Inducción unipolar*: Una esfera conductora con magnetización uniforme $\mathbf{M} = M_0\hat{z}$ gira con velocidad angular constante $\boldsymbol{\omega} = \omega\hat{z}$. El movimiento es no relativista y la esfera es neutra. El régimen es estacionario y se asume que esta situación puede mantenerse indefinidamente sin que ningún agente fuerce la rotación de la esfera.

(a) Como no hay disipación, no puede haber corrientes de conducción. Usando la ley de Ohm para el conductor en movimiento, demostrar que se induce una densidad de carga uniforme dentro de la esfera y encontrar su valor. (Despreciar el campo magnético asociado a las cargas inducidas.)

(b) Puesto que la esfera es neutra, su momento monopolar debe ser nulo. Demostrar con argumentos de simetría que su momento dipolar también es nulo. Encontrar el campo eléctrico en todo el espacio y mostrar que es cuadrupolar.

(c) Encontrar la densidad superficial de carga sobre la esfera.

(d) Calcular la fuerza electromotriz que se induce entre un polo de le esfera y su ecuador.

Referencia: Jackson, *Classical Electrodynamics*, 3ra. ed., problema 6.4.

9* *Corrientes de Foucault*: Una esfera de radio a y conductividad σ está inmersa en un campo magnético externo uniforme $\mathbf{B}_{\text{ext}} = \mathbf{B}_0\, e^{-i\omega t}$. (Notar que eligiendo $\mathbf{B}_0 = B_x\hat{x} \pm iB_y\hat{y}$ se obtiene un campo que rota.) En los dos casos extremos, en que la longitud de penetración es mucho mayor o mucho menor que el radio de la esfera, y bajo la aproximación cuasiestacionaria, calcular la potencia que se disipa en la esfera como consecuencia de las corrientes de inducidas.

Referencias: Landau y Lifshitz, *Electrodynamics of continuous media*, §**59** en la versión en inglés [Depth of penetration of a magnetic field into a conductor] o §**45** [Corrientes de Foucault] en la versión española, a partir de la ec. 45.12.

10* *Movimiento de un conductor en un campo magnético*: Una esfera de radio a y conductividad σ gira con velocidad angular $\boldsymbol{\omega} = \omega\hat{z}$ en presencia de un campo magnético externo y estático, $\mathbf{B}_0 = B_0\hat{x}$. El régimen es estacionario, $\omega a \ll c$ y $a \ll \delta$. Calcular los campos $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$ dentro del conductor mediante cada uno de los siguientes métodos:

i) Resolver hasta orden ω las ecuaciones de Maxwell en el sistema del laboratorio.

ii) Pasar a un sistema que rota con la esfera, de tal modo que el problema se convierta en el de un conductor quieto en un campo externo variable (despreciando la excitación de corrientes por aceleración, que aparecen en el orden siguiente).

Referencia: Landau y Lifshitz, *Electrodynamics of continuous media*, §**63** en la versión en inglés [Motion of a conductor in a magnetic field] o §**49** de la versión española; también, Panofsky y Phillips, *Classical Electricity and Magnetism*, sec. **9−3**.

11 Feynman, vol. 2, sección 23.2.

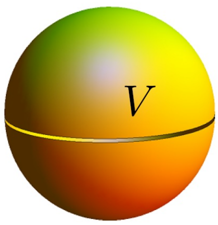
12 R.H. Romer: "What do 'voltmeters' measure? Faraday's law in a multiply connected region", Am. J. Phys., **50**, p. 1089-93 (1982). [link]

13 Usar el tensor de Maxwell para encontrar:

(a) La fuerza entre dos esferas de radios a y b, con cargas q_1 y q_2 y separadas una distancia $d > a + b$.

(b) La fuerza por unidad de longitud entre dos cilindros paralelos infinitos de radios a y b, separados una distancia $d > a + b$, y por los que circulan corrientes uniformes I_1 e I_2.

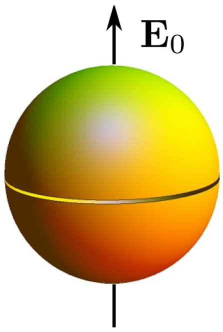
14 Una esfera conductora de radio a está a potencial V. Usando el tensor de Maxwell, calcular la fuerza que tiende a separar cualquier par de hemisferios. Comparar con el resultado obtenido a partir de la fuerza de Lorentz. Si la esfera está aislada y tiene carga Q: sin hacer ningún otro cálculo, ¿cuál es la fuerza que tiende a separar sus hemisferios?



15 Una esfera conductora descargada tiene radio a y está en un campo eléctrico externo uniforme $\mathbf{E}_0$.

(a) Calcular la fuerza que tiende a separar o a unir los hemisferios según la dirección de $\mathbf{E}_0$.

(b) Calcular la fuerza si ahora la esfera tiene carga neta Q ¿Puede obtenerse este resultado sumando a la fuerza obtenida en el ítem anterior la fuerza calculada en la segunda parte del problema 14?



16 Calcular la fuerza por unidad de área sobre la superficie de un solenoide infinito de sección arbitraria, con n vueltas por unidad de longitud y corriente I.

17 Calcular la fuerza por unidad de área sobre las paredes de un cilindro infinito de radio a que transporta una corriente superficial uniforme paralela a su eje.

18 Calcular la fuerza por unidad de área sobre las paredes de una esfera de radio a con corriente superficial $\boldsymbol{\kappa}(\theta, \varphi) = \kappa_0 \mathrm{sen}\theta\, \hat{\varphi}(\varphi)$.