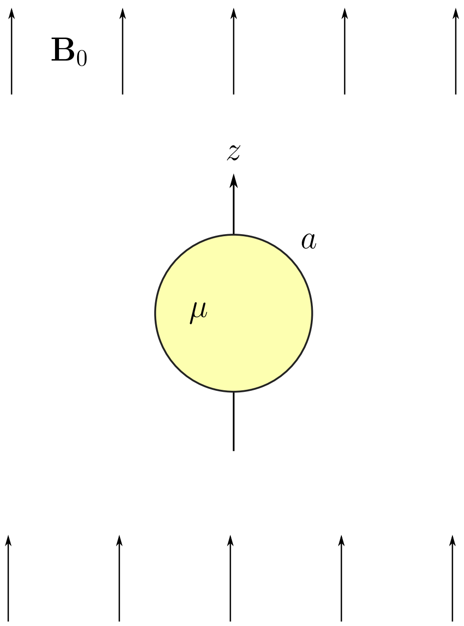
FÍSICA TEÓRICA 1 – 1er. cuatrimestre de 2017
Esfera magnetizable en un campo externo

Una esfera magnetizable de permeabilidad μ está inmersa en un campo magnético externo $\mathbf{B}_0 = B_0\,\hat{z}$. Se trata de calcular el campo magnético en todo el espacio. La esfera tiene radio a y está centrada en el origen.



El campo magnético externo puede pensarse de dos maneras: i) como el campo muy lejos de la esfera, ii) más generalmente, como el campo que habría si no estuviese la esfera y cuyas fuentes no son perturbadas por la presencia de la esfera.

Primer método

Este primer método es menos general que el que vimos en clase, pero más fácil de usar en este caso, en el que el campo externo está dado. Las ecuaciones para $\mathbf{B}$ son:

$$\nabla\cdot\mathbf{B} = 0$$

$$\nabla\times\mathbf{B} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}_{\text{libre}} + 4\pi\nabla\times\mathbf{M}. \tag{1}$$

Como no hay corrientes libres (a todos los efectos prácticos el campo externo uniforme carece de fuentes) se puede introducir un campo $\mathbf{H}$,

$$\mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M}, \tag{2}$$

que satisface las dos ecuaciones

$$\nabla\cdot\mathbf{H} = -4\pi\nabla\cdot\mathbf{M}, \tag{3}$$

$$\nabla\times\mathbf{H} = 0. \tag{4}$$

La segunda ecuación permite escribir $\mathbf{H}$ a partir de un campo escalar continuo en todo el espacio,

$$\mathbf{H} = -\nabla\Phi. \tag{5}$$

El problema para $\mathbf{H}$ queda planteado como un problema electrostático, donde $\mathbf{H}$ hace las veces de un campo eléctrico, cuyas fuentes, según la Ec. (3), están dadas por $-\nabla \cdot \mathbf{M}$. La magnetización en este problema, forma parte de las incógnitas, así que aún no tenemos un problema cerrado. Falta relacionar $\mathbf{M}$ con $\mathbf{H}$. A eso vamos. Pero antes, un mensaje de La Cámara Argentina de Fabricantes de Imanes:

La CAFI aconseja

Rara vez es necesario calcular las cargas magnéticas $\rho_M = -\nabla \cdot \mathbf{M}$, que podrán ser volumétricas o de superficie. (Rara vez significa: imanes con magnetización no uniforme). La información sobre las cargas magnéticas quedará usualmente contenida en la ecuación que les da origen, $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, que implica la continuidad de la componente normal de $\mathbf{B}$ a través de cualquier superficie.

La magnetización $\mathbf{M}$ se produce debido al campo total $\mathbf{B}$. Para un medio lineal, isótropo y homogéneo es

$$\mathbf{M} = \chi\mathbf{B} = \frac{\mu - 1}{4\pi\mu}\mathbf{B}, \tag{6}$$

que implica

$$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}. \tag{7}$$

Yo tiendo a ver como más fundamental la relación (6) entre $\mathbf{M}$ y $\mathbf{B}$ que la que hay entre $\mathbf{B}$ y $\mathbf{H}$. Puesto que $\mathbf{H}$ es un campo auxiliar, no siempre convendrá definirlo del mismo modo. La magnetización $\mathbf{M}$ se produce porque hay un campo $\mathbf{B}$. Notarán en la literatura que esto forma parte de una antigua discusión, que parece haberse resuelto en favor de este último punto de vista: $\mathbf{H}$ es un campo auxiliar, $\mathbf{B}$ es el campo que produce los torques y las fuerzas y es el que está directamente relacionado con $\mathbf{M}$.

Más allá de eso, lo importante aquí es la proporcionalidad entre los tres campos, $\mathbf{B}$, $\mathbf{H}$ y $\mathbf{M}$. Siempre que no se crucen superficies de separación en donde μ cambie de un valor a otro, la proporcionalidad se transmite a las divergencias de los campos. En otras palabras, es $\nabla \cdot \mathbf{B} \sim \nabla \cdot \mathbf{H} \sim \nabla \cdot \mathbf{M}$ siempre que los factores que dependan de μ sean constantes y se puedan sacar fuera del símbolo de derivación. De ahí la importancia de no aplicar esto en regiones en donde μ esté cambiando de valor. En definitiva (exceptuando el caso $\mu = 1$ que es trivial):

$$\frac{4\pi\mu}{\mu - 1}\nabla \cdot \mathbf{M} = \mu\nabla \cdot \mathbf{H} = \nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \tag{8}$$

De esta manera, la divergencia de $\mathbf{M}$ es cero dentro de la esfera, donde μ es uniforme. Con saber eso basta. Decir que $\nabla \cdot \mathbf{M} = 0$ en el volumen deja sólo la posibilidad de tener cargas magnéticas en superficie, equivalentes a una densidad superficial. Y no necesitamos saber más.

El problema completo se resuelve a través del potencial Φ, tal que $\mathbf{H} = -\nabla\Phi$, y de la condición de continuidad de $\mathbf{B}$ normal a través de la superficie $r = a$. Fuera de la esfera, $\mathbf{H} = \mathbf{B}$. Y, puesto que el potencial Φ tiene que dar cuenta del campo externo $\mathbf{B}_0$ muy lejos de la esfera, habrá que reservar uno de los términos usualmente omitidos en la región no acotada $r > a$. Para reproducir el campo lejos de la esfera, Φ deberá contener un término $-zB_0$, divergente cuando $z \to \infty$, lo que no produce ninguna contrariedad. Podemos escribir:

$$\Phi = -zB_0 + \Phi_\mu = -rB_0 \cos\theta + \Phi_\mu, \tag{9}$$

donde Φ_μ es el potencial de la densidad superficial de carga magnética sobre la superficie de la esfera. Para escribirlo usamos la forma general de un potencial (con simetría azimutal) cuyas fuentes están en la superficie de una esfera de radio a,

$$\Phi_\mu = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos\theta) A_l \left(\frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} \right)_a . \tag{10}$$

Teniendo en cuenta que fuera de la esfera es $\mathbf{B} = \mathbf{H} = -\nabla\Phi$, y que dentro de le esfera es $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H} = -\mu\nabla\Phi$, la continuidad de $\mathbf{B} \cdot \hat{r}$ a través de la esfera de radio a, implica:

$$B_0 \cos\theta + \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos\theta) \frac{(l+1)A_l}{a^2} = \mu \left[B_0 \cos\theta - \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos\theta) \frac{lA_l}{a^2} \right]. \tag{11}$$

La única ecuación no homogénea es la que resulta para $l = 1$, de modo que $A_l = 0$ si $l \neq 1$. Para A_1 encontramos:

$$A_1 = \frac{\mu - 1}{\mu + 2} B_0 a^2. \tag{12}$$

Cosas para chequear: A_1 es cero si $B_0 = 0$ o si $\mu = 1$, dos situaciones triviales. Las unidades: el potencial asociado a A_1 va como A_1 dividido una longitud, de modo que A_1 tendría que tener unidades de potencial $\times$ longitud, y en efecto así es: $A_1 \sim B_0 a^2 \sim \Phi/a \times a^2 \sim \Phi a$.

El campo magnético dentro de la esfera es

$$\mathbf{B} = \mu \left(1 - \frac{\mu - 1}{\mu + 2} \right) \mathbf{B}_0 = \frac{3\mu}{\mu + 2} \mathbf{B}_0. \tag{13}$$

Notar que si $\mu > 0$, la magnitud del campo en el interior de la esfera es mayor que la del campo aplicado $\mathbf{B}_0$, debido a que $3\mu > \mu + 2$. Contrariamente a lo que pasa con una esfera dieléctrica en un campo externo, en donde el campo de las cargas de polarización tiende a cancelar el campo aplicado externamente. El resultado en ese caso era

$$\mathbf{E}_{\text{int}} = \frac{3}{\epsilon + 2} \mathbf{E}_0, \tag{14}$$

y para $\epsilon > 1$ es $3 < \epsilon + 2$. La diferencia entre el caso magnético y el eléctrico proviene del hecho de que el campo magnético se obtiene como $-\mu\nabla\Phi$, en tanto que el campo eléctrico es directamente $-\nabla\Phi$. Si hacen tender μ a infinito, el campo magnético dentro de la esfera magnetizable satura en el valor $3B_0$. Si hacen tender ϵ a infinito, el campo eléctrico dentro de la esfera polarizable tiende a cero.

Afuera de la esfera magnetizable, el campo magnético total es

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \left(\frac{\mu - 1}{\mu + 2} \right) a^3 B_0 \, \frac{3(\hat{z} \cdot \hat{r})\hat{r} - \hat{z}}{r^3}. \tag{15}$$

El segundo término es el campo dipolar de un momento magnético de valor

$$\mathbf{m} = \left(\frac{\mu-1}{\mu+2}\right) a^3\mathbf{B}_0. \tag{16}$$

Lo mismo podría haberse inferido a partir de la contribución al potencial dada por

$$A_1\frac{a\cos\theta}{r^2} = \left(\frac{\mu-1}{\mu+2}\right) B_0 a^3\,\frac{\cos\theta}{r^2}, \tag{17}$$

que tiene la forma del potencial de un dipolo,

$$\Phi_{\rm dip} = \frac{\mathbf{m}\cdot\hat{r}}{r^2}, \tag{18}$$

con el mismo valor de $\mathbf{m}$ encontrado antes.

Si restamos el campo externo, obtenemos el campo $\mathbf{B}_\mu$ producido exclusivamente por la magnetización. Dentro de la esfera es:

$$\mathbf{B}_\mu = 2\left(\frac{\mu-1}{\mu+2}\right)\mathbf{B}_0, \tag{19}$$

y afuera,

$$\mathbf{B}_\mu = \left(\frac{\mu-1}{\mu+2}\right)\,\frac{3(\hat{z}\cdot\hat{r})\hat{r}-\hat{z}}{r^3}\,B_0 = \left(\frac{\mu-1}{\mu+2}\right)\,\frac{3(\mathbf{B}_0\cdot\hat{r})\hat{r}-\mathbf{B}_0}{r^3}. \tag{20}$$

Otra comprobación: debido a que el campo externo aplicado $\mathbf{B}_0$ es uniforme, la continuidad de la componente normal debería valer separadamente para el campo aplicado y para el campo producido por la magnetización. Verifiquémoslo:

$$\mathbf{B}_\mu\big|_{a^+}\cdot\hat{r} = \left(\frac{\mu-1}{\mu+2}\right) a^3 B_0\,\left(\frac{3\cos\theta-\cos\theta}{a^3}\right) = 2\left(\frac{\mu-1}{\mu+2}\right) B_0\cos\theta, \tag{21}$$

$$\mathbf{B}_\mu\big|_{a^-}\cdot\hat{r} = 2\left(\frac{\mu-1}{\mu+2}\right)\mathbf{B}_0\cdot\hat{r} = 2\left(\frac{\mu-1}{\mu+2}\right) B_0\cos\theta. \tag{22}$$

Segundo método

Es el método que vimos en clase. Consiste en separar desde el comienzo el campo total en la suma del campo externo más el campo producido por la magnetización.

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_\mu, \tag{23}$$

donde, al no haber corrientes externas,

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\mathbf{B} &= 0,\\ \nabla\times\mathbf{B} &= 4\pi\nabla\times\mathbf{M}.\end{aligned} \tag{24}$$

Puesto que el campo externo es uniforme en todo el espacio, trivialmente satisface las dos ecuaciones

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\mathbf{B}_0 &= 0,\\ \nabla\times\mathbf{B}_0 &= 0.\end{aligned} \tag{25}$$

Reemplazando en las ecuaciones para el campo total, esto implica

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{B}_\mu &= 0, \\ \nabla \times \mathbf{B}_\mu &= 4\pi \nabla \times \mathbf{M}. \end{aligned} \tag{26}$$

La última ecuación permite introducir un campo auxiliar $\mathbf{H}_\mu = \mathbf{B}_\mu - 4\pi\mathbf{M}$, cuyo rotor es cero, y que por lo tanto puede escribirse como

$$\mathbf{H}_\mu = -\nabla\Phi_\mu, \tag{27}$$

con fuentes

$$\nabla \cdot \mathbf{H}_\mu = -4\pi \nabla \cdot \mathbf{M}. \tag{28}$$

Da la impresión de que el problema se separó completamente en un campo externo $\mathbf{B}_0$ y en un campo $\mathbf{B}_\mu$ independiente de aquél. Pero esto no puede ser cierto, porque sin campo externo debería ser $\mathbf{B}_\mu = 0$ y no habría entonces nada que resolver. El campo externo está implícito en las ecuaciones para $\mathbf{B}_\mu$ a través de la magnetización $\mathbf{M}$, que es resultado del campo total:

$$\mathbf{M} = \chi\mathbf{B} = \frac{\mu - 1}{4\pi\mu}(\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_\mu), \tag{29}$$

y así el problema para $\mathbf{B}_\mu$ encuentra su vínculo con $\mathbf{B}_0$.

Nos interesa tener una relación entre $\mathbf{H}_\mu$ y $\mathbf{B}_\mu$. Reemplazando en la ecuación anterior $4\pi\mathbf{M}$ por $\mathbf{B}_\mu - \mathbf{H}_\mu$, obtenemos (siempre dentro de la esfera)

$$\mathbf{B}_\mu = (\mu - 1)\mathbf{B}_0 + \mu\mathbf{H}_\mu. \tag{30}$$

Notar que esta no es la relación habitual del tipo $\mathbf{B}_\mu = \mu\mathbf{H}_\mu$. Pero en cambio, pasando $\mathbf{B}_0$ al miembro de la izquierda se encuentra

$$\mathbf{B} = \mu(\mathbf{B}_0 + \mathbf{H}_\mu), \tag{31}$$

que puede interpretarse como $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ si al campo externo $\mathbf{B}_0$ se le asocia un campo $\mathbf{H}_0 = \mathbf{B}_0$, ya que sus fuentes no tienen relación con ninguna magnetización. De esta forma sigue valiendo la relación $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$. Haber hecho esta identificación desde el comienzo, nos hubiera llevado al primer método de solución.

La Ec. (29) muestra que dentro de la esfera la magnetización vuelve a tener divergencia nula, porque $\mathbf{B}$ tiene divergencia nula. Eso implica que las fuentes de $\mathbf{H}_\mu$, proporcionales a la divergencia de $\mathbf{M}$, están únicamente sobre la superficie de la esfera. Así, el potencial Φ_μ es el de una cáscara esférica:

$$\Phi_\mu = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos\theta) A_l \left(\frac{r_<^l}{r_>^{l+1}}\right)_a \tag{32}$$

El problema se cierra a través de la condición de continuidad de $\mathbf{B}_\mu$ normal a través de la esfera de radio a, condición que proviene de la primera Ec. (26). Escribiendo $\mathbf{B}_\mu = -\nabla\Phi_\mu$ para $r > a$ y usando la Ec. (30)

para $r < a$, encontramos:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{B}_\mu\Big|_{a^+} \cdot \hat{r} &= \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos\theta)\frac{(l+1)A_l}{a^2} \\
\mathbf{B}_\mu\Big|_{a^-} \cdot \hat{r} &= (\mu-1)B_0\cos\theta - \mu\sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos\theta)\frac{lA_l}{a^2}.
\end{aligned}
\tag{33}
$$

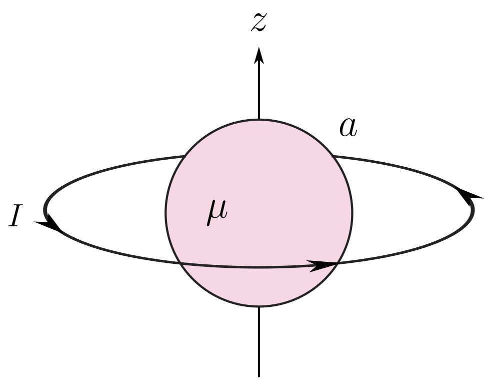
Igualando término a término en l, queda $A_l = 0$ si $l \neq 1$, y

$$
A_1 = \left(\frac{\mu-1}{\mu+2}\right) B_0 a^2. \tag{34}
$$

A partir de aquí el problema continúa igual que antes.

Ventajas del segundo método

Si reven el primer método, notarán que una de las primeras condiciones pedidas fue que $\mathbf{j}_{\text{libre}}$ fuera cero, porque nuestro objetivo era definir un campo $\mathbf{H}$ cuyo rotor fuera cero. Ahora bien, consideren el mismo problema de la esfera magnetizable pero ahora en lugar de un campo externo uniforme, supongan que hay una espira con corriente, como muestra la figura.



Se trata sólo de un ejemplo representativo de un problema más general en el que un medio magnetizable convive con corrientes libres.

Si intentasen aplicar el primer método, enseguida se encontrarían con el obstáculo que representa no poder definir un campo $\mathbf{H}$ con rotor cero. Adiós, potencial escalar Φ y adiós, problema electrostático equivalente.*

El segundo método, en cambio, sigue funcionando. Con el segundo método, lo que uno hacía era separar de entrada el campo total $\mathbf{B}$ en una contribución $\mathbf{B}_0$ conocida y otra $\mathbf{B}_\mu$ debida a la magnetización. Fue sólo un accidente que $\mathbf{B}_0$ haya sido un campo uniforme. Así hubiera sido el campo producido por ciertas corrientes estáticas, externas a la esfera magnetizable, el método hubiera seguido funcionando. No es difícil ver por qué.

*Hay una forma de salvar estas dificultades, pero es un poco artificiosa. Les dejo como propuesta que la encuentren. La clave está en el siguiente inciso: $\mathcal{PROBLEMA\ ESTACIONARIO}$. Espero sus respuestas a vuelta de correo.

Para eso, asumamos que hay corrientes libres con densidad de corriente $\mathbf{j}_{\text{libre}}$. Por simplicidad supongamos que estas corrientes no cruzan el interior de la esfera. Si la esfera magnetizable no estuviera presente, las corrientes libres producirían un campo $\mathbf{B}_0$, tal que:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{B}_0 &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{B}_0 &= \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}_{\text{ libre}} \end{aligned} \tag{35}$$

Con la esfera magnetizable presente, las ecuaciones son

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}_{\text{ libre}} + 4\pi\nabla \times \mathbf{M} \end{aligned} \tag{36}$$

Separemos el campo total en dos partes,

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_\mu. \tag{37}$$

Esta separación es razonable. Si $\mu = 1$, el campo $\mathbf{B}_\mu$ debería anularse y obtenemos el resultado conocido. Simplemente estamos separando la solución del campo total en una parte que sabemos cómo resolver y en otra parte de la que no tenemos la menor idea. La primera contribución es, en principio, conocida: el $\mathbf{B}_0$ que producen las corrientes libres. La segunda contribución es nuestra incógnita, $\mathbf{B}_\mu$, el campo asociado a la magnetización. Ahora bien, puesto que $\mathbf{B}_0$ satisface las ecuaciones de un campo magnético cuyas fuentes son $\mathbf{j}_{\text{libre}}$,

$$\nabla \times \mathbf{B}_0 = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}_{\text{libre}}, \tag{38}$$

en las ecuaciones para el campo completo, el rotor de $\mathbf{B}_0$ se simplifica con sus propias fuentes,

$$\nabla \times \mathbf{B} = \nabla \times (\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_\mu) = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}_{\text{ libre}} + 4\pi\nabla \times \mathbf{M} \Rightarrow \nabla \times \mathbf{B}_\mu = 4\pi\nabla \times \mathbf{M} \tag{39}$$

Finalmente el par de ecuaciones que queda para $\mathbf{B}_\mu$ es:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{B}_\mu &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{B}_\mu &= 4\pi\nabla \cdot \mathbf{M} \end{aligned} \tag{40}$$

A partir de aquí todo sigue igual que antes. Se define un campo auxiliar $\mathbf{H}_\mu = \mathbf{B}_\mu - 4\pi\mathbf{M}$ asociado a $\mathbf{B}_\mu$, cuyo rotor es cero y que por lo tanto puede obtenerse de un potencial escalar. La relación entre $\mathbf{H}_\mu$ y $\mathbf{B}_\mu$, necesaria para escribir la continuidad de la componente normal de $\mathbf{B}_\mu$, se obtiene asimismo a partir de la relación entre $\mathbf{M}$ y el campo $\mathbf{B}$ total para un medio lineal:

$$4\pi\mathbf{M} = \frac{(\mu - 1)}{\mu}\mathbf{B}$$

$$\Rightarrow \mathbf{B}_\mu - \mathbf{H}_\mu = \frac{(\mu - 1)}{\mu}(\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_\mu)$$

$$\Rightarrow \mathbf{B}_\mu = \mu\mathbf{H}_\mu + (\mu - 1)\mathbf{B}_0 \tag{41}$$

Desde de aquí sigue todo igual, con la diferencia de que ahora $\mathbf{B}_0$ es un campo magnético externo cualquiera. Más aún, podría ser un campo producido tanto por corrientes libres como por imanes permanentes. La única condición práctica es que puedan calcularlo. En el caso del campo de la espira, lo más sencillo sería calcular el potencial vector mediante la integral de Green es esféricas. No pueden pretender resolver todo mediante campos escalares.