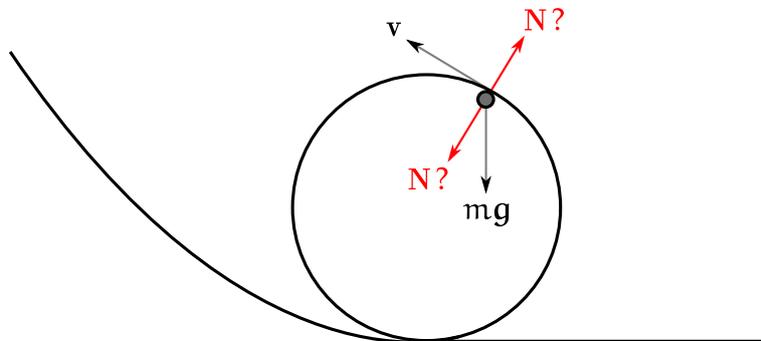


¿Para dónde apunta esta fuerza?	1
Reflexión total interna	3
Si todo pudiera dibujarse y otros animales fabulosos	4
Primer caso: $n \sin \theta \leq n'$	6
Segundo caso: $n' < n \sin \theta$	7
¡Mirá! Hago cálculos sin usar las manos	7
¡Fuera de aquí, Ángulo de Transmisión!	8
El regreso triunfal del Ángulo de Transmisión	11
La reflexión total interna revisitada	12
Energía transmitida hacia el segundo medio	15
El vector de Poynting cuando no hay reflexión total interna	16
El vector de Poynting cuando sí hay reflexión total interna	17

¿Para dónde apunta esta fuerza?

En Física 1 es común encontrarse con la siguiente situación: un cuerpo está bajo la acción varias fuerzas, de las cuales se conoce una sola, por ejemplo, el peso, y se trata de encontrar cuánto valen las otras. El planteo habitual empezará por hacer un dibujo donde aparezcan las fuerzas aplicadas. Es decir, el cuerpo en cuestión y una serie de vectores cuyas direcciones suelen estar dadas por la geometría del problema. Al hacer el diagrama uno elige arbitrariamente el sentido en que apuntan las fuerzas desconocidas.



[¿En qué sentido hay que dibujar la fuerza normal N? Da lo mismo, el problema se las arregla por sí mismo para que el vector N sea independiente de esa elección.]

Si, al calcular las fuerzas, se comprueba que alguna de éstas tenía el sentido opuesto al dibujado eso no significa que deba plantearse todo el problema nuevamente, con el dibujo de las fuerzas corregido. El dibujo es simplemente una guía. Si alguna de las fuerzas incógnita se dibujó según la dirección y el sentido del versor \hat{x} , por ejemplo, en las ecuaciones tal fuerza aparecerá escrita como $\mathbf{F} = F\hat{x}$. Si luego de resuelto el problema resulta que F es una cantidad negativa eso no invalida el procedimiento. Lo que sí suele ocurrir es que, si el problema va a ser expuesto en clase o escrito para su publicación, entonces uno rehace los dibujos y elige las fuerzas de manera que sus valores sean positivos. En el ejemplo anterior, en la versión en limpio del problema se dibujará la fuerza \mathbf{F} en el sentido opuesto al de \hat{x} y se obtendrá que F es una cantidad positiva.

Debe quedar claro que no hay ninguna contradicción entre dibujar un vector en cierto sentido y decir luego que su valor es negativo. Existen otros muchos casos análogos: si al calcular cuánta agua se congela en un calorímetro que contiene hielo y agua líquida, se obtiene que se congela una cantidad negativa, eso se interpreta diciendo que se funde una cantidad positiva de hielo; si al calcular las corrientes en un circuito se obtienen valores negativos, eso significa que ciertas corrientes que se dibujaron entrantes a un nodo eran en realidad salientes, o viceversa. Uno podría prescindir del dibujo y asignar a todas las fuerzas valores F_i , sin proponer ningún signo determinado. Ahora bien, esto no es motivo suficiente para renunciar a los dibujos y diagramas. Su utilidad no disminuye porque el resultado analítico esté en contradicción con las flechitas que hemos dibujado. Matemáticamente, es equivalente decir que $\mathbf{F} = -F\hat{x}$ que decir que $\mathbf{F} = F(-\hat{x})$. Cada uno de esos enunciados corresponde a un sentido distinto de la flechita dibujada en el diagrama, pero no altera el contenido físico.

$$-F\hat{x} \quad \equiv \quad F(-\hat{x})$$

¿Qué tiene que ver lo anterior con los problemas de ondas planas? Tal vez ustedes pensarán que puede darse el caso de que uno dibuje una onda yendo para un lado, y que luego de resolver el problema se dé cuenta de que en realidad *debería* haberla dibujado para el otro. Bueno, eso puede pasar. La analogía en ese caso con los problemas de fuerzas o corrientes sería demasiado cercana como para justificar estas notas. Sería algo fácil de manejar para ustedes. La cuestión es otra, aunque en el fondo veremos que se trata de lo mismo. La experiencia indica que es uno de los puntos más difíciles de asimilar.

La pregunta es: ¿qué pasa si dibujamos un vector de onda en cierta dirección y cierto sentido y al resolver el problema descubrimos que el vector que dibujamos tenía parte real e imaginaria distintas de cero?

El asunto parece a primera vista más difícil de resolver que un problema de signos o sentidos. Incluso si el vector de onda fuera un vector imaginario puro, no nos preocuparía demasiado, porque después de todo la unidad imaginaria i actúa como una constante multiplicativa cualquiera. Pero un vector de onda con parte real e imaginaria distintas de cero viene a cuestionar no sólo la forma

en que lo representamos en un dibujo, sino la forma en que dibujamos los propios campos. Por ejemplo, ¿cómo debe aplicarse la regla de la mano derecha para calcular $\mathbf{B} = \frac{c}{\omega} \mathbf{k} \times \mathbf{E}$ cuando resulte imposible alinear el dedo mayor en la dirección de un vector \mathbf{k} que sea igual, por decir algo, a $\hat{x} + i\hat{y}$? ¿Habrá que crecer dedos imaginarios?

Si la resolución del problema se basó en un diagrama, y si los resultados indican que ese diagrama en verdad no se puede dibujar, uno se queda con la impresión de que hay una especie de invalidación en el procedimiento, de que existe una contradicción lógica o de que hay algo incompatible con las hipótesis iniciales. Veremos que un número de onda complejo no es más difícil de manejar que un número de onda negativo, y que los diagramas mantienen su utilidad.

Reflexión total interna

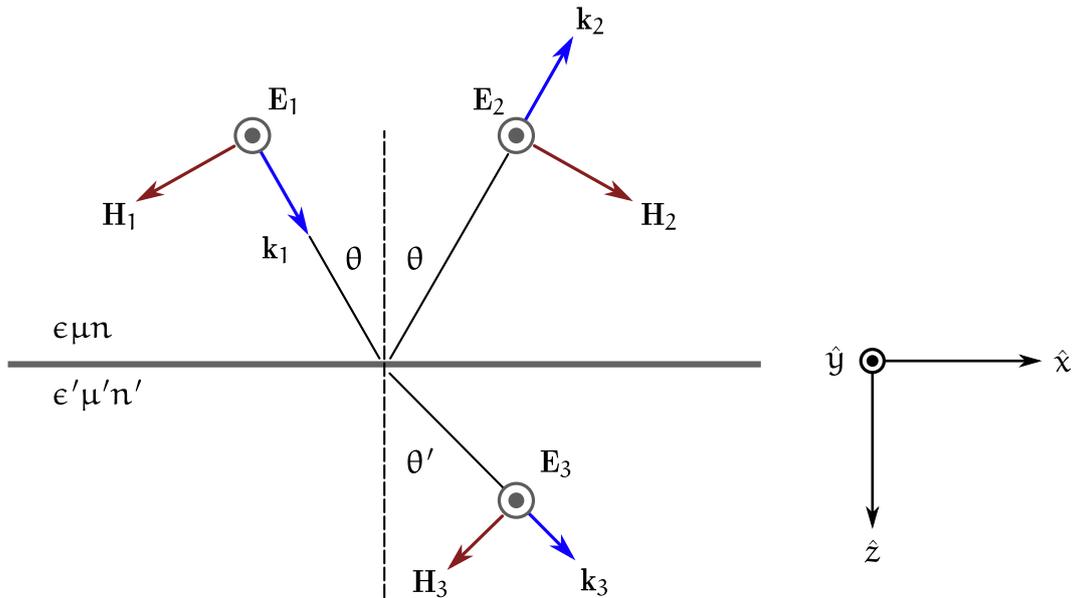
El problema más sencillo en donde aparecen vectores de onda complejos es el de la reflexión total interna. Iremos paso a paso, distinguiendo las elecciones que son arbitrarias de las que son necesidades lógicas. El objetivo es ver cómo aparecen vectores de onda complejos en un problema en el que todos los datos son reales. Primero resolveremos el problema ayudados por un dibujo, como es habitual. Después veremos cómo podemos hacer todo sin referencia a ningún diagrama. La conclusión será que aún en el caso de que aparezcan vectores de onda complejos, el diagrama conserva su validez para guiar los cálculos.

Recordemos brevemente lo que ocurre: dos medios dieléctricos con índices de refracción n y n' , con $n' < n$, están separados por una interfase plana, y una onda plana incide sobre la interfase propagándose desde el primer al segundo medio. El caso típico sería una fuente de luz sumergida en el agua y dirigida hacia la superficie. Todos los parámetros que caracterizan a los dieléctricos son cantidades reales y positivas: ϵ , μ , $n = \sqrt{\epsilon\mu}$, etc. La frecuencia ω también es real y, sin pérdida de generalidad, puede tomarse positiva. Una de las hipótesis adicionales, que suele pasarse por alto, es que el vector de onda de la onda incidente también es real, y que su componente normal a la interfase tiene el signo correcto, de manera que la onda en verdad se propaga desde el primer medio al segundo. Si la normal a la interfase, dibujada como un versor que va desde el primer medio hacia el segundo, es \mathbf{n} , y el vector de onda incidente es \mathbf{k}_1 , se entiende que $\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{n} > 0$.

Todo esto corresponde a una situación de laboratorio idealizada: la fuente de luz está en una posición específica respecto de la interfase, la dirección y el sentido de incidencia son inequívocos y el vector número de onda de la onda incidente puede considerarse real. Esto último no es tan restrictivo ni arbitrario como parece: a los efectos prácticos, lo único que interesa es la amplitud de la onda incidente sobre la interfase. Si el vector de onda incidente tiene una parte imaginaria (lo que indicaría que en el primer medio hay atenuación), el factor $e^{-k_{\text{im}}x}$ puede ser absorbido en la definición de la amplitud de la onda sobre la interfase. Más aún, el origen del tiempo puede elegirse de modo que, sobre la interfase, la amplitud de la onda incidente sea real. Probablemente el aspecto en el que más difieran la situación idealizada de la experimental sea en la hipótesis de que se trata de una onda plana monocromática.

Si todo pudiera dibujarse y otros animales fabulosos

En resumen: podemos resolver el problema asumiendo que la onda incidente está definida por un número de onda que es un vector real y por una amplitud que también es real. Los dieléctricos están caracterizados, asimismo, por permitividades y permeabilidades reales. A primera vista todo es dibujable* sobre el papel. Vamos a calcular las amplitudes de las ondas reflejadas y transmitidas como si todas las magnitudes pudieran representarse como cantidades reales en un dibujo. La figura muestra el caso de incidencia TE.



El vector de onda incidente es

$$\mathbf{k}_1 = \cos \theta \hat{z} + \sin \theta \hat{x}. \quad (1)$$

Pero la onda es verdaderamente incidente sólo si

$$-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \quad (2)$$

donde θ se mide a partir del semieje z positivo, en el sentido antihorario respecto del eje y . Sin pérdida de generalidad podemos tomar $0 \leq \theta$ (y por lo tanto $0 \leq \sin \theta$). El otro caso corresponde a reflejar el problema respecto del plano zy .

La compatibilidad de las condiciones de contorno sobre la interfase implica que las componentes en la dirección x de los tres vectores de onda son iguales,

$$k_{1x} = k_{2x} = k_{3x} \equiv k_{||}. \quad (3)$$

Sabemos además que

$$k_1 = k_2 = \frac{\omega n}{c}, \quad k_3 = \frac{\omega n'}{c}, \quad (4)$$

*El comité de ética de la RAE puede ir a ver si ya puso la marrana.

donde $k_i = \sqrt{\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{k}_i}$. Por el momento asumimos que todo es real. Luego, a partir del diagrama, leemos que

$$k_{ix} = k_i \sin \theta_i, \quad (5)$$

y entonces deducimos que

$$\sin \theta_1 = \sin \theta_2, \quad n \sin \theta_1 = n' \sin \theta_3. \quad (6)$$

La igualdad $\sin \theta_1 = \sin \theta_2$ no fija unívocamente el ángulo θ_2 . Podría ser $\theta_2 = \theta_1$ o bien $\theta_2 = \pi - \theta_1$. Notar que θ_2 se mide a partir del semieje z negativo, en el sentido horario respecto del eje y . Si tomásemos $\theta_2 = \pi - \theta_1$, obtendríamos

$$\mathbf{k}_2 = \frac{\omega n}{c} \left[-\cos(\pi - \theta_1) \hat{z} + \sin(\pi - \theta_1) \hat{x} \right] = \frac{\omega n}{c} (\cos \theta_1 \hat{z} + \sin \theta_1 \hat{x}) = \mathbf{k}_1. \quad (7)$$

Pero si $\mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_1$, en el primer medio no hay dos ondas, como habíamos supuesto, sino una sola. Puede demostrarse que el problema en donde sólo hay una onda a cada lado de la superficie es un caso especial del problema de tres ondas, que ocurre cuando la amplitud de la onda reflejada es cero. De manera que sólo nos interesa considerar el caso $\theta_2 = \theta_1$. Vale la pena mencionar que la amplitud reflejada sólo puede anularse para incidencia TM, y que el ángulo de incidencia para el que sucede tal cosa se denomina ángulo de Brewster. Desde ahora escribiremos $\theta_1 = \theta_2 = \theta$ y $\theta_3 = \theta'$. Lo importante es recordar que los tres vectores de onda comparten la misma proyección sobre el eje x .

En el diagrama también hemos dibujado las amplitudes de los campos \mathbf{E} y \mathbf{H} . Tratándose de incidencia TE, todos los vectores \mathbf{E} están en la dirección y , perpendicular al plano del papel. Los vectores \mathbf{H} están dibujados aplicando la regla de la mano derecha a través de las relaciones

$$\mathbf{k}_i \times \mathbf{E}_i = \frac{\omega \mu_i}{c} \mathbf{H}_i \rightarrow \mathbf{H}_i = \frac{n_i}{\mu_i} \hat{\mathbf{k}}_i \times \mathbf{E}_i, \quad (8)$$

donde

$$\hat{\mathbf{k}}_i = \frac{\mathbf{k}_i}{k_i}. \quad (9)$$

Es fácil leer en el dibujo cuáles son las proyecciones de los campos sobre el plano de la interfase. Las condiciones de continuidad de \mathbf{E} y \mathbf{H} tangenciales son:

$$E_1 + E_2 = E_3,$$

$$\frac{n}{\mu} (E_1 - E_2) \cos \theta = \frac{n'}{\mu'} E_3 \cos \theta'. \quad (10)$$

Luego,

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{\frac{n}{\mu} \cos \theta - \frac{n'}{\mu'} \cos \theta'}{\frac{n}{\mu} \cos \theta + \frac{n'}{\mu'} \cos \theta'}, \quad \frac{E_3}{E_1} = \frac{2 \frac{n}{\mu} \cos \theta}{\frac{n}{\mu} \cos \theta + \frac{n'}{\mu'} \cos \theta'}. \quad (11)$$

Lo único que falta precisar es el valor de $\cos \theta'$. Sabemos que

$$\sin \theta' = \frac{n}{n'} \sin \theta, \quad (12)$$

entonces

$$\cos \theta' = \pm \sqrt{1 - \left(\frac{n}{n'} \sin \theta\right)^2}. \quad (13)$$

La ley de Snell deja dos posibilidades para el valor de $\cos \theta'$, pero ése es un detalle menor. Más preocupante es que bajo el signo de la raíz aparecerá una cantidad negativa siempre que $n \sin \theta$ sea mayor que n' (recordar que estamos asumiendo que $0 \leq \sin \theta$, por eso omitimos las barras de valor absoluto). Esta alternativa es del todo posible. En efecto, si $n' < n$, basta con incidir con un ángulo θ tal que

$$\frac{n'}{n} < \sin \theta. \quad (14)$$

En tal situación, $\cos \theta'$ resultaría imaginario puro, y en verdad no todo sería tan dibujable como supusimos. Notar que esto no puede ocurrir si $n < n'$, pues requeriría un ángulo θ tal que $1 < \sin \theta$, y por lo tanto θ debería tener una parte imaginaria distinta de cero, contrariamente a las hipótesis del problema, que asumían un ángulo de incidencia real. El ángulo límite a partir del cual $\cos \theta'$ se vuelve imaginario se llama ángulo crítico, y queda definido por

$$\sin \theta_c = \frac{n'}{n}. \quad (15)$$

Primer caso: $n \sin \theta \leq n'$

Analicemos primero el caso menos problemático de interpretar, cuando $n \sin \theta \leq n'$. La cantidad bajo la raíz en la Ec. (13) es entonces mayor o igual que cero, θ' es un ángulo real y el vector \mathbf{k}_3 puede representarse sobre el papel como un vector ordinario. Los dos signos posibles para $\cos \theta'$ en la Ec. (13) expresan el hecho de que la onda en el segundo medio puede viajar en dos sentidos: desde o hacia la interfase. Es decir, la onda que llamamos *transmitida* podría en realidad ser *incidente*. Esto no contradice ninguna de las hipótesis del problema, y es completamente análogo al caso mecánico que tratamos en la primera página. Sin embargo, esta situación, en la que hay una onda incidente a cada lado de la interfase pero una sola onda *reflejada*, es experimentalmente difícil de realizar. Supondría disponer de dos fuentes de luz, precisamente calibradas en amplitud y en fase de manera que valiera la condición

$$\frac{E_3}{E_1} = \frac{2 \frac{n}{\mu} \cos \theta}{\frac{n}{\mu} \cos \theta + \frac{n'}{\mu'} \cos \theta'}. \quad (16)$$

Y no sólo eso, sino que el ángulo θ' también debería ser fijado externamente en el valor adecuado dado por la ley de Snell.

En una situación experimental ordinaria, con una sola fuente de luz, no hay dos ondas incidentes, y por lo tanto debemos quedarnos con la onda que verdaderamente se transmite al segundo medio. Es decir, debemos pedir que sea $0 < k_{3z}$, y por lo tanto

$$\cos \theta' = + \sqrt{1 - \left(\frac{n}{n'} \sin \theta\right)^2}. \quad (17)$$

Debe quedar claro que la otra solución es perfectamente válida. En todo caso, la condición de que sea $0 < k_{3z}$ debe tomarse como un vínculo adicional, algo que uno fija arbitrariamente y que está de acuerdo a las condiciones experimentales usuales.

Hasta aquí no ha habido ninguna dificultad especial. Mientras $n \sin \theta \leq n'$ el vector de onda en el segundo medio es real y todo es representable en un diagrama. Ahora veremos el otro caso.

Segundo caso: $n' < n \sin \theta$

Si fuera $n' < n \sin \theta$, la aplicación lisa y llana de la ley de Snell implicaría

$$\cos^2 \theta' = 1 - \left(\frac{n}{n'} \sin \theta \right)^2 < 0, \quad (!) \quad (18)$$

lo que se traduce a su vez en que

$$\cos \theta' = \pm i \sqrt{\left(\frac{n}{n'} \sin \theta \right)^2 - 1}. \quad (19)$$

La forma de obtener un coseno puramente imaginario es a través de un ángulo que se escriba como $\varphi = \frac{\pi}{2} - i\alpha$, con α real. En efecto,

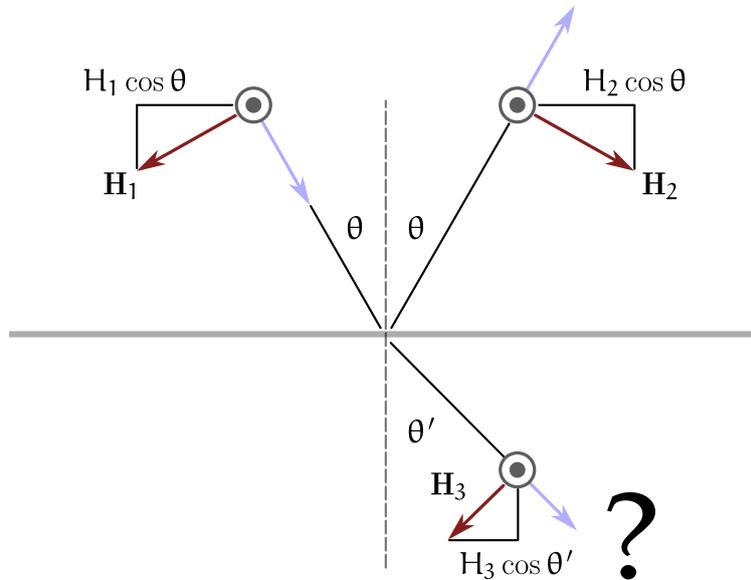
$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \cos \left(\frac{\pi}{2} - i\alpha \right) = \cos \frac{\pi}{2} \cos i\alpha + \sin \frac{\pi}{2} \sin i\alpha \\ &= \frac{e^{-\alpha} - e^{\alpha}}{2i} = i \sinh \alpha. \end{aligned} \quad (20)$$

A partir de este momento vale preguntarse si tiene sentido continuar. Después de todo, nuestra deducción de la ley de Snell se basa en una comparación de las proyecciones de los vectores de onda sobre el plano de la interfase. Esa proyección la obtuvimos apoyándonos en un dibujo que representaba a θ' como un ángulo ordinario, lo que vuelve cuestionable la deducción posterior, toda vez que esa misma deducción nos dice que el ángulo θ' es imaginario y que el dibujo no puede tomarse como literalmente válido.

Ignorando el consejo de las gentes sensatas de calcular primero y preguntar después, no seguiremos adelante con el problema de la reflexión total interna hasta que no sepamos cómo resolver la aparente inconsistencia relacionada con los ángulos complejos.

¡Mirá! Hago cálculos sin usar las manos

La pregunta que queremos responder ahora es si los resultados que dedujimos antes siguen valiendo cuando $\cos \theta'$ es imaginario. Tal vez la instancia más evidente en donde el cálculo podría invalidarse sea al tomar las proyecciones tangenciales de los vectores \mathbf{H}_i , puesto que es algo que hicimos basándonos en los diagramas. Reproducimos a continuación la figura en cuestión.



Cuando el ángulo θ' no es real: ¿tiene sentido decir que la proyección de \mathbf{H}_3 sobre el plano de la interfase es simplemente $-H_3 \cos \theta'$ en la dirección \hat{x} ? Más fundamental aún: ¿qué significa $\cos \theta'$? La forma más inequívoca de contestar estas preguntas es independizándonos por un rato de los diagramas. Lo que sigue es la deducción de la ecuación de continuidad para \mathbf{H} tangencial y del vector de onda \mathbf{k}_3 sin hacer trampa mediante dibujos moralmente cuestionables.

¡Fuera de aquí, Ángulo de Transmisión!

La relación entre los campos \mathbf{E}_3 y \mathbf{H}_3 es

$$\frac{\omega}{c} \mathbf{H}_3 = \frac{1}{\mu'} \mathbf{k}_3 \times \mathbf{E}_3. \quad (21)$$

Para incidencia TE,

$$\mathbf{E}_3 = E_3 \hat{y}. \quad (22)$$

Por otro lado, conocemos la componente x de \mathbf{k}_3 , porque es común a todas las ondas:

$$\mathbf{k}_3 = k_{||} \hat{x} + k_{3z} \hat{z}, \quad (23)$$

donde

$$\begin{aligned} k_{||} &= k_{1x} = \mathbf{k}_1 \cdot \hat{x} = k_1 \sin \theta \\ &= \frac{\omega}{c} n \sin \theta. \end{aligned} \quad (24)$$

No hay nada que objetar en el cálculo de $k_{||}$, debido a que, por hipótesis, \mathbf{k}_1 es un vector real. Combinando las ecs. (21), (22) y (23) resulta:

$$\mathbf{H}_3 = \frac{c}{\omega \mu'} (k_{||} \hat{z} - k_{3z} \hat{x}) E_3. \quad (25)$$

Para escribir la condición de continuidad de la componente tangencial de \mathbf{H} necesitamos únicamente la componente x de \mathbf{H}_3 . Recordar que \mathbf{k}_1 real implicaba \mathbf{k}_2 real, de modo que en el primer medio las proyecciones tangenciales de \mathbf{H}_1 y \mathbf{H}_2 se calculan sin ambigüedades,

$$H_{1x} = -\frac{n}{\mu} E_1 \cos \theta, \quad H_{2x} = \frac{n}{\mu} E_2 \cos \theta. \quad (26)$$

En definitiva, la continuidad de \mathbf{H} tangencial a través de la interfase se escribe como

$$\frac{n}{\mu}(E_1 - E_2) \cos \theta = \frac{c}{\omega \mu'} k_{3z} E_3. \quad (27)$$

Falta decir cómo calcular k_{3z} en términos de los datos del problema. En primer lugar, sabemos que

$$\mathbf{k}_3 \cdot \mathbf{k}_3 = \left(\frac{\omega}{c} n'\right)^2, \quad (28)$$

y esto implica

$$k_{\parallel}^2 + k_{3z}^2 = \left(\frac{\omega}{c} n'\right)^2. \quad (29)$$

De aquí y de la Ec. (24) se obtiene

$$k_{3z} = \pm \frac{\omega}{c} n' \sqrt{1 - \left(\frac{c}{\omega n'} k_{\parallel}\right)^2} = \pm \frac{\omega}{c} n' \sqrt{1 - \left(\frac{n}{n'} \sin \theta\right)^2}. \quad (30)$$

Si $n \sin \theta$ es menor o igual que n' , entonces k_{3z} es real. La elección del signo es hasta cierto punto arbitraria: como dijimos antes, la situación experimental usual será aquella en que no haya onda incidente desde el segundo medio, de modo que deberá tomarse $0 \leq k_{3z}$,

$$k_{3z} = \frac{\omega}{c} n' \sqrt{1 - \left(\frac{n}{n'} \sin \theta\right)^2}. \quad (31)$$

Si, por el contrario, $n \sin \theta$ es mayor que n' , k_{3z} será imaginario puro,

$$k_{3z} = \pm i \frac{\omega}{c} n' \sqrt{\left(\frac{n}{n'} \sin \theta\right)^2 - 1} = \pm i \kappa, \quad (32)$$

donde podemos convenir en que $\kappa > 0$. Ahora la elección del signo no es arbitraria: el campo eléctrico en el segundo medio, con su dependencia espacial y temporal explícita, resulta

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_3(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{E}_3 e^{i(\mathbf{k}_3 \cdot \mathbf{r} - \omega t)} = \mathbf{E}_3 \exp [i(k_{\parallel} x \pm i \kappa z - \omega t)] \\ &= \mathbf{E}_3 \exp (\mp \kappa z) \exp [i(k_{\parallel} x - \omega t)], \end{aligned} \quad (33)$$

por lo tanto si eligiéramos $k_{3z} = -i \kappa$ obtendríamos una solución divergente para $z \rightarrow \infty$. De modo que en este caso también debemos tomar la raíz con el signo positivo. Concluimos entonces que, tanto si k_{3z} es imaginario puro o real, es

$$k_{3z} = \frac{\omega}{c} n' \sqrt{1 - \left(\frac{n}{n'} \sin \theta\right)^2}, \quad (34)$$

con la convención de que si dentro de la raíz figura un número negativo se tomará

$$\sqrt{1 - \left(\frac{n}{n'} \sin \theta\right)^2} = +i\sqrt{\left(\frac{n}{n'} \sin \theta\right)^2 - 1}. \quad (35)$$

Debe quedar claro que si el segundo medio es acotado en la dirección z , como en el ejemplo de la reflexión total interna frustrada, entonces habrá que conservar siempre las dos soluciones posibles para k_{3z} , sin importar si es real o imaginario.

Volviendo a la condición de continuidad para la componente tangencial de \mathbf{H} , Ec. (36), queda

$$\frac{n}{\mu}(E_1 - E_2) = \frac{n'}{\mu'} E_3 \sqrt{1 - \left(\frac{n}{n'} \sin \theta\right)^2}. \quad (36)$$

Préstese especial atención al hecho de que en ningún momento hemos asociado un ángulo con el vector \mathbf{k}_3 . El único ángulo que aparece es θ , que, por hipótesis, es real. Para deducir las ecuaciones anteriores nunca nos basamos en un dibujo a partir del cual leyéramos las proyecciones de los vectores \mathbf{k}_3 o \mathbf{H}_3 .

La ecuación de continuidad de \mathbf{E} tangencial no requiere ningún comentario, es, como antes

$$E_1 + E_2 = E_3, \quad (37)$$

y junto con la Ec. (36) definen por completo los campos E_2 y E_3 en términos de los datos del problema, a saber, E_1 , θ y las permeabilidades y permitividades de cada medio.

Esto merece contrastarse con la primera situación que consideramos, cuando todo era real y dibujable. Cuando dedujimos las ecuaciones de continuidad, leyendo directamente las proyecciones de cada vector a partir del dibujo, escribimos el par de ecs. (10); en particular, para la componente tangencial de \mathbf{H} obtuvimos

$$\frac{n}{\mu}(E_1 - E_2) \cos \theta = \frac{n'}{\mu'} E_3 \cos \theta', \quad (38)$$

donde, según la Ec. (17),

$$\cos \theta' = \sqrt{1 - \left(\frac{n}{n'} \sin \theta\right)^2}. \quad (39)$$

Fíjense entonces que la Ec. (36), deducida sin referencia a ningún dibujo cuestionable, es idéntica a la Ec. (38). Aun en el caso en que θ' tenga parte imaginaria distinta de cero, todo sigue funcionando como si valiera la Ec. (39). Es más, sea lo que sea el "ángulo" θ' , si $\cos \theta'$ está dado por (39), debe ser entonces

$$\sin^2 \theta' = \left(\frac{n}{n'} \sin \theta\right)^2, \quad (40)$$

y recuperamos la ley de Snell,

$$n \sin \theta = n' \sin \theta'. \quad (41)$$

En resumen: esa aparente abominación que es θ' cuando $n \sin \theta$ es mayor que n' aparece en todas las ecuaciones del mismo modo en que aparecía el real, el inocente, el siempre dibujable e inofensivo θ' cuando $n \sin \theta$ era menor que n' . El dibujo sigue valiendo como guía aunque \mathbf{k}_3 no sea en verdad dibujable. Y ése era todo el asunto.

El regreso triunfal del Ángulo de Transmisión

Veamos qué sucedería si *definiéramos* el ángulo θ' a través de la ecuación

$$\mathbf{k}_3 = \frac{\omega}{c} \mathbf{n}' (\sin \theta' \hat{x} + \cos \theta' \hat{z}), \quad (42)$$

sin referencia a ningún dibujo. Lo fundamental aquí es que la igualdad

$$\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1 \quad (43)$$

es válida para todo φ , tenga o no parte imaginaria igual a cero. La única condición que exigíamos a priori para \mathbf{k}_3 en la Ec. (28) es que su cuadrado fuera igual a $(\omega \mathbf{n}'/c)^2$. La definición (42) satisface esto automáticamente. Estamos definiendo θ' en términos de \mathbf{k}_3 , contrariamente a lo que hacíamos al leer \mathbf{k}_3 a partir de ciertos ángulos en un dibujo.

La igualdad de las componentes tangenciales de los vectores de onda fija el valor de $\sin \theta'$,

$$\begin{aligned} k_{1x} = k_{3x} &\Rightarrow \frac{\omega n}{c} \sin \theta = \frac{\omega n'}{c} \sin \theta' \\ &\Rightarrow n \sin \theta = n' \sin \theta'. \end{aligned} \quad (44)$$

Notar que en el lado izquierdo de la última igualdad figuran todas cantidades reales, y que el ángulo θ se puede representar en un dibujo ordinario y tiene el significado geométrico usual. En cambio, en el lado derecho figura el seno de un ángulo que no necesariamente puede definirse de manera gráfica. Lo único que hemos hecho ha sido definir un objeto al que caprichosamente llamamos $\sin \theta'$. Pero esta vicisitud termina siendo anecdótica: la Ec. (44), que expresa la ley de Snell, se escribe igual que si todo pudiera dibujarse.

Fijados el valor de $\sin \theta'$ y la componente x de \mathbf{k}_3 , entonces el $\cos \theta'$ y la componente z quedan dados por

$$\begin{aligned} \cos \theta' &= \pm \sqrt{1 - \left(\frac{n}{n'} \sin \theta\right)^2} \\ k_{3z} &= \pm \frac{\omega n'}{c} \sqrt{1 - \left(\frac{n}{n'} \sin \theta\right)^2}. \end{aligned} \quad (45)$$

Esta expresión es válida independientemente de si lo que figura bajo la raíz es o no mayor que cero. Ya discutimos más arriba cómo la elección del signo frente a la raíz depende de las condiciones del problema.

El punto central que hay que recordar es el siguiente: \mathbf{k}_3 puede definirse según una ecuación que tiene la misma forma tanto si θ' es real o no. Por lo tanto, todas las ecuaciones que se deduzcan de esa ecuación inicial tendrán la misma forma que si todo fuera representable por vectores reales en un dibujo. Las ecuaciones se deducen a partir de operaciones sobre vectores.

Si los vectores se escriben de la misma forma, las ecuaciones serán de la misma forma, aunque cambie la interpretación de ciertas componentes de los vectores de onda. Aunque ya no pueda interpretarse literalmente, el dibujo sigue siendo válido para construir las ecuaciones, y permite escribirlas de manera más inmediata.

Ante la duda, siempre tienen el recurso de escribir todas las ecuaciones sin acudir a ningún dibujo indibujable, y de resolver todo vectorialmente. Los diagramas son prescindibles. Goldstein emite una amarga queja acerca del estilo expositivo relacionado con esa renuncia. En uno de los apartados bibliográficos de su libro de mecánica hace la siguiente reseña:

E.T. Whittaker, *Analytical Dynamics*. A well-known treatise that presents an exhaustive treatment of analytical mechanics from the older viewpoints. The development is marked, regrettably, by an apparent dislike of diagrams (of which there are only four in the entire book) and of vector notation [...]. (H. Goldstein, *Classical Mechanics*, 2nd ed, p. 30.)

Cuando tengan escrúpulos acerca de cómo calcular las componentes del número de onda, acudan directamente a su definición. Si k_{\parallel} y $k^2 = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k}$ son conocidos, lo único que tienen que hacer es escribir

$$k_{\perp}^2 = k^2 - k_{\parallel}^2, \quad (46)$$

y seleccionar el signo correcto de la raíz. Si el medio es acotado en la dirección perpendicular a la interfase, ambos signos serán aceptables y en general habrá que tener en cuenta las dos ondas. Para un dieléctrico ordinario, $k^2 = \mu\epsilon\omega^2/c^2$ es un número real. Cuando haya disipación o el medio sea conductor, el propio k^2 puede ser un número con parte imaginaria distinta de cero. Para más detalles, miren el libro de J.A. Stratton, *Electromagnetic Theory*.

La reflexión total interna revisitada

Convencidos entonces de que las condiciones de continuidad en la interfase se escriben (en el caso TE) como

$$E_1 + E_2 = E_3,$$

$$\frac{n}{\mu}(E_1 - E_2) \cos \theta = \frac{n'}{\mu'} E_3 \cos \theta', \quad (47)$$

donde

$$\cos \theta' = \pm \sqrt{1 - \left(\frac{n}{n'} \sin \theta\right)^2}, \quad (48)$$

la solución para las amplitudes reflejadas y transmitidas es

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{\frac{n}{\mu} \cos \theta - \frac{n'}{\mu'} \cos \theta'}{\frac{n}{\mu} \cos \theta + \frac{n'}{\mu'} \cos \theta'}, \quad \frac{E_3}{E_1} = \frac{2 \frac{n}{\mu} \cos \theta}{\frac{n}{\mu} \cos \theta + \frac{n'}{\mu'} \cos \theta'}. \quad (49)$$

Cuando n' es menor que n , y el seno del ángulo θ sobrepasa el valor crítico n'/n , obtenemos

$$\begin{aligned}\cos \theta' &= i \sqrt{\left(\frac{n \sin \theta}{n'}\right)^2 - 1} \\ &\equiv i \frac{c}{\omega n'} \kappa \\ &\equiv i \zeta,\end{aligned}\tag{50}$$

donde el signo frente a la raíz se ha elegido para que la solución sea acotada cuando $z \rightarrow \infty$, ya que

$$\begin{aligned}\mathbf{k}_3 &= k_{3x} \hat{x} + k_{3z} \hat{z} = k_{\parallel} \hat{x} + \frac{\omega n'}{c} \cos \theta' \\ &\rightarrow e^{i\mathbf{k}_3 \cdot \mathbf{r}} = e^{ik_{\parallel} x} e^{-\kappa z}.\end{aligned}\tag{51}$$

Así, la fase de la onda se propaga en la dirección x y su amplitud se atenúa en la dirección z .

La observación fundamental es que, al ser $\cos \theta'$ un número imaginario puro, la amplitud de la onda reflejada se escribe como un número complejo dividido por su conjugado,

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{\frac{n}{\mu} \cos \theta - i \frac{n'}{\mu'} \zeta}{\frac{n}{\mu} \cos \theta + i \frac{n'}{\mu'} \zeta},\tag{52}$$

de tal forma que

$$\frac{|E_2|}{|E_1|} = 1,\tag{53}$$

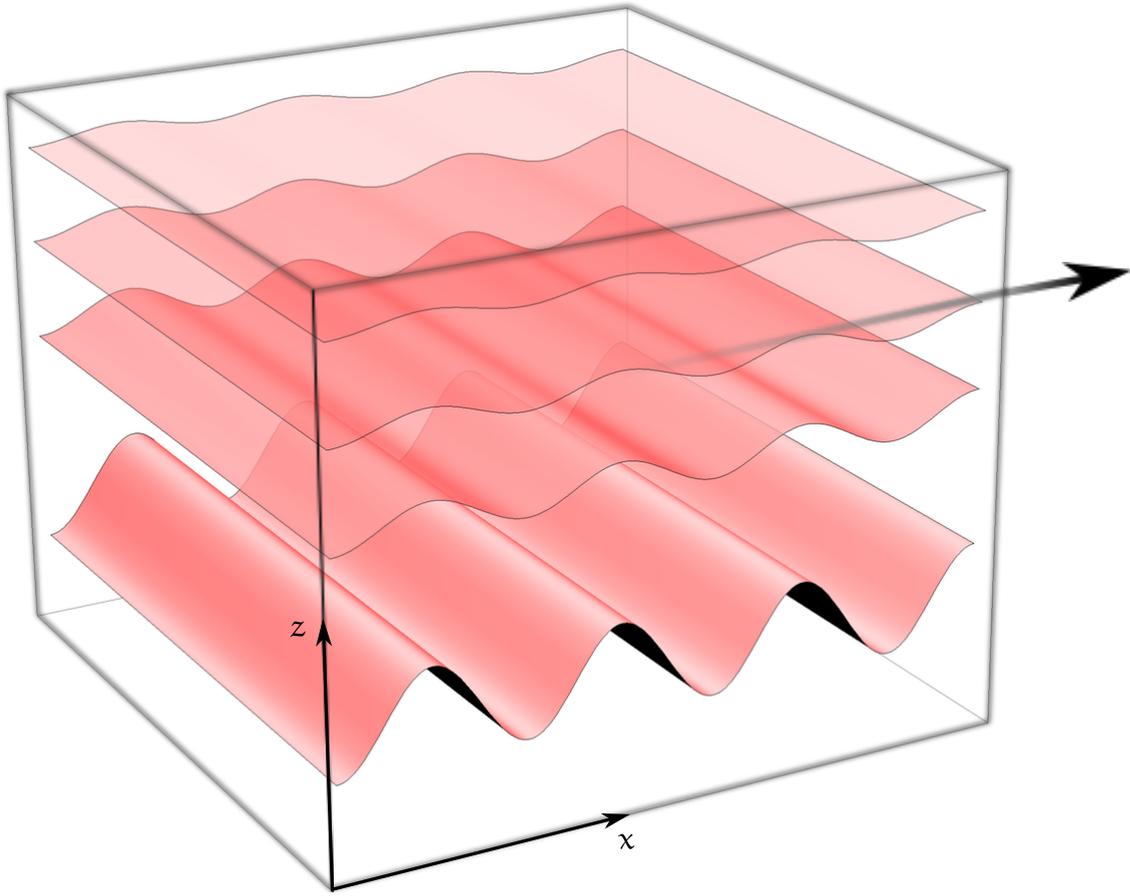
y la onda se refleja con una amplitud cuyo módulo es igual al de la onda incidente. Este es el motivo de que se hable de reflexión total. El módulo de la onda reflejada es igual al de la incidente, pero hay un corrimiento de fase. En efecto, escribiendo

$$\frac{n}{\mu} \cos \theta - i \frac{n'}{\mu'} \zeta = \rho e^{i\alpha},\tag{54}$$

donde α y ρ son números reales, resulta

$$E_2 = E_1 e^{2i\alpha}.\tag{55}$$

Es un error frecuente creer que cuando se produce la reflexión total se anula la onda transmitida. Lo que ocurre es que la onda transmitida no transporta energía hacia el segundo medio; es una onda evanescente que se propaga a lo largo de la interfase y que decae hacia el interior del segundo medio.



La longitud típica de decaimiento está dada por las Ecs. (50) y (51),

$$\delta = \frac{1}{\kappa} = \left[\frac{\omega n'}{c} \sqrt{\left(\frac{n \sin \theta}{n'} \right)^2 - 1} \right]^{-1}. \quad (56)$$

Notar que $\omega n'/c$ es $2\pi/\lambda'$, donde λ' es la longitud de onda, correspondiente a la frecuencia ω dentro del segundo medio. Esto permite comparar δ con una longitud característica, ya que entonces

$$\frac{\delta}{\lambda'} = \left[2\pi \sqrt{\left(\frac{n \sin \theta}{n'} \right)^2 - 1} \right]^{-1}. \quad (57)$$

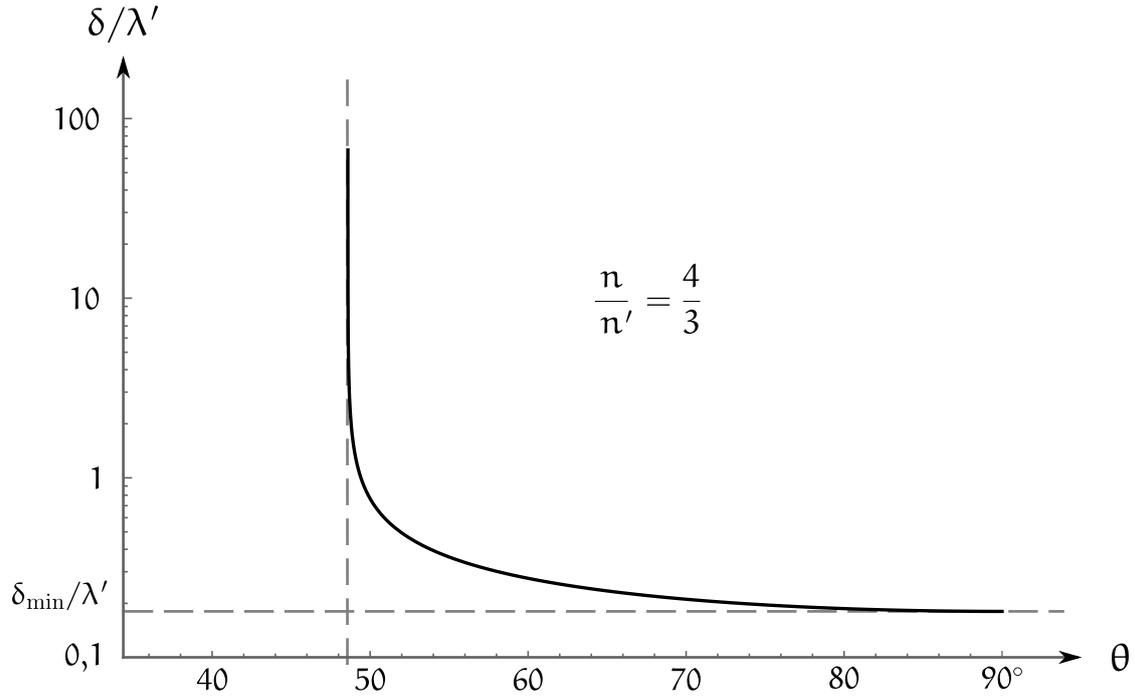
Justo cuando θ toma el valor crítico

$$\sin \theta_c = \frac{n'}{n}, \quad (58)$$

$\delta \rightarrow \infty$ y la onda se propaga sin atenuación a lo largo de la interfase, pues es $\cos \theta' = 0$. Al aumentar θ' , la longitud de penetración disminuye abruptamente. Cuando la incidencia es rasante su valor alcanza un mínimo, dado por

$$\frac{\delta_{\min}}{\lambda'} = \left[2\pi \sqrt{\left(\frac{n}{n'} \right)^2 - 1} \right]^{-1}. \quad (59)$$

La figura de abajo muestra el caso de de incidencia agua–aire.



Energía transmitida hacia el segundo medio

El promedio temporal del vector de Poynting calculado en el segundo medio, donde sólo hay una onda propagándose, es

$$\langle \mathbf{S}_3(\mathbf{r}) \rangle = \frac{c}{8\pi} \text{Re} \left[\mathbb{E}_3(\mathbf{r}, t) \times \mathbb{H}_3^*(\mathbf{r}, t) \right] = \frac{c}{8\pi} \frac{c}{\omega\mu'} \text{Re} \left\{ \mathbb{E}_3(\mathbf{r}, t) \times \left[\mathbf{k}_3 \times \mathbb{E}_3(\mathbf{r}, t) \right]^* \right\}, \quad (60)$$

donde hemos usado que $\mathbb{H}_3 = c\mathbf{k}_3 \times \mathbb{E}/\omega\mu'$. El término entre llaves es el término importante. La forma de desarrollarlo es típica, así que deberían prestar atención a los pasos siguientes. Lo primero es fácil, distribuir el doble producto vectorial,

$$\mathbb{E}_3 \times \left(\mathbf{k}_3 \times \mathbb{E}_3 \right)^* = |\mathbb{E}_3|^2 \mathbf{k}_3^* - (\mathbf{k}_3^* \cdot \mathbb{E}_3) \mathbb{E}_3^*. \quad (61)$$

Si el vector de onda fuera real podríamos usar la relación de ortogonalidad

$$\mathbf{k}_3 \cdot \mathbb{E}_3 = 0, \quad (62)$$

pero en el caso general $\mathbf{k}_3 \neq \mathbf{k}_3^*$. Sin embargo, como $\mathbf{k}_3 = \mathbf{k}_{||} + \mathbf{k}_{3z}$, la relación de ortogonalidad implica

$$\mathbf{k}_{||} \cdot \mathbb{E}_3 = -\mathbf{k}_{3z} \cdot \mathbb{E}_3, \quad (63)$$

y, debido a que por hipótesis $\mathbf{k}_{||}$ es real, finalmente resulta

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_3^* \cdot \mathbb{E}_3 &= \mathbf{k}_{||} \cdot \mathbb{E}_3 + \mathbf{k}_{3z}^* \cdot \mathbb{E}_3 = (\mathbf{k}_{3z}^* - \mathbf{k}_{3z}) \cdot \mathbb{E}_3 \\ &= -2i \text{Im}[\mathbf{k}_{3z}] \cdot \mathbb{E}_3. \end{aligned} \quad (64)$$

Reemplazando este resultado en la Ec. (61) queda

$$\mathbb{E}_3 \times (\mathbf{k}_3 \times \mathbb{E}_3)^* = |\mathbb{E}_3|^2 \mathbf{k}_3^* + 2i (\text{Im}[\mathbf{k}_{3z}] \cdot \mathbb{E}_3) \mathbb{E}_3^*. \quad (65)$$

Luego, la Ec. (60) se escribe como

$$\langle \mathbf{S}_3(\mathbf{r}) \rangle = \frac{c}{8\pi} \frac{c}{\omega\mu'} \text{Re} \left\{ |\mathbb{E}_3|^2 \mathbf{k}_3^* + 2i (\text{Im}[\mathbf{k}_{3z}] \cdot \mathbb{E}_3) \mathbb{E}_3^* \right\}. \quad (66)$$

Ahora hay que analizar por separado cada caso, según sea θ menor o mayor que el ángulo crítico.

El vector de Poynting cuando no hay reflexión total interna

Cuando no hay reflexión total interna, $\text{Im}[\mathbf{k}_{3z}] = 0$ y el promedio temporal del vector de Poynting en el segundo medio resulta

$$\langle \mathbf{S}_3(\mathbf{r}) \rangle = \frac{c}{8\pi} \frac{c}{\omega\mu'} |\mathbb{E}_3(\mathbf{r}, t)|^2 \mathbf{k}_3, \quad \theta \leq \theta_c. \quad (67)$$

Recordar que en esta ecuación es

$$\mathbb{E}_3(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_3 e^{i(\mathbf{k}_3 \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \rightarrow |\mathbb{E}_3(\mathbf{r}, t)|^2 = |\mathbf{E}_3|^2. \quad (68)$$

La última igualdad depende de manera crucial de que \mathbf{k}_3 es un vector real, y que, por lo tanto, la exponencial tiene módulo 1. En definitiva, cuando no hay reflexión total interna es

$$\langle \mathbf{S}_3(\mathbf{r}) \rangle = \frac{c}{8\pi} \frac{c}{\omega\mu'} |\mathbf{E}_3|^2 \mathbf{k}_3, \quad \theta \leq \theta_c. \quad (69)$$

Noten que $\langle \mathbf{S}_3 \rangle$ es en verdad independiente de la posición. Este último resultado asegura la conservación de la energía (en promedio temporal). Veamos por qué.

La ecuación local para la conservación de la energía relaciona la densidad de energía electromagnética u , el vector de Poynting \mathbf{S} y el trabajo realizado sobre las corrientes libres. Se trata de una ecuación de continuidad con fuentes:

$$\frac{\partial u(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{S}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t). \quad (70)$$

El promedio de la derivada temporal de una función acotada debe ser cero (traten de encontrar un contraejemplo y se van a dar cuenta por qué). Luego, en promedio debe valer

$$\nabla \cdot \langle \mathbf{S}(\mathbf{r}, t) \rangle = \langle \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \rangle. \quad (71)$$

Se sobreentiende que en todas estas ecuaciones figuran los campos verdaderos, que se obtienen de tomar la parte real o imaginaria de \mathbb{E} , \mathbb{H} , etc. Si el medio es no conductor, la corriente es cero, y la ecuación de conservación se lee como

$$\nabla \cdot \langle \mathbf{S}(\mathbf{r}, t) \rangle = 0. \quad (72)$$

El vector constante de la Ec. (69) satisface trivialmente esta igualdad.

El vector de Poynting cuando sí hay reflexión total interna

Analicemos qué ocurre cuando hay reflexión total interna. El cálculo parece más largo de lo que es; puede hacerse de corrido en pocos minutos; hay muchos pasos que son elementales. Conservamos el nivel de detalle para no dejar puntos oscuros.

Sabemos que la componente z de \mathbf{k}_3 es un número imaginario puro,

$$\mathbf{k}_{3z} = i\kappa \hat{z}, \quad (73)$$

con κ real y mayor que cero. Por otro lado, la parte real de \mathbf{k}_3 es igual a su componente paralela a la interfase, $\text{Re}[\mathbf{k}_3] = \mathbf{k}_{\parallel}$. Entonces, reemplazando en la Ec. (66), obtenemos

$$\langle \mathbf{S}_3(\mathbf{r}) \rangle = \frac{c}{8\pi} \frac{c}{\omega\mu'} \left\{ |\mathbb{E}_3(\mathbf{r}, t)|^2 \mathbf{k}_{\parallel} - 2\kappa \text{Im} \left[\hat{z} \cdot \mathbb{E}_3(\mathbf{r}, t) \mathbb{E}_3(\mathbf{r}, t)^* \right] \right\}, \quad \theta_c < \theta. \quad (74)$$

Aquí hemos usado que $\text{Re}[ix] = -\text{Im}[x]$. Ahora queremos escribir \mathbb{E} en términos de la amplitud \mathbf{E} y de los factores exponenciales que la acompañan. Hay que prestar no mucha, sino muchísima atención a los exponentes. Tenemos que

$$\mathbb{E}_3(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_3 e^{i(\mathbf{k}_3 \cdot \mathbf{r} - \omega t)} = \mathbf{E}_3 e^{i(\mathbf{k}_{\parallel} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} e^{-\kappa z}, \quad (75)$$

de manera que (usando brevemente notación de díadas)

$$\mathbb{E}_3(\mathbf{r}, t) \mathbb{E}_3(\mathbf{r}, t)^* = \mathbf{E}_3 \mathbf{E}_3^* e^{-2\kappa z}. \quad (76)$$

Noten que, en general, $e^{i\Phi} (e^{i\Phi})^*$ no es igual a 1. Eso sólo ocurre si Φ es real. Si no supiéramos que \mathbf{k}_{\parallel} y ω son cantidades reales, la Ec. (76) carecería de justificación. Dicho esto, resulta

$$\langle \mathbf{S}_3(\mathbf{r}) \rangle = \frac{c}{8\pi} \frac{c}{\omega\mu'} e^{-2\kappa z} \left\{ |\mathbf{E}_3|^2 \mathbf{k}_{\parallel} - 2\kappa \text{Im} \left[\hat{z} \cdot \mathbf{E}_3 \mathbf{E}_3^* \right] \right\}, \quad \theta_c < \theta. \quad (77)$$

Vemos que hay una dependencia obvia en z , debido a la atenuación de la onda transmitida.

En todas estas consideraciones nunca fijamos la polarización, de modo que son válidas en general. Escribamos la amplitud \mathbf{E}_3 como una combinación de componentes TE y TM. Las llamaremos \mathbf{E}_{TE} y \mathbf{E}_{TM} , respectivamente,

$$\mathbf{E}_3 = \mathbf{E}_{\text{TE}} + \mathbf{E}_{\text{TM}}. \quad (78)$$

Puesto que el plano de incidencia es el plano xz , deben ser

$$\mathbf{E}_{\text{TE}} = E_{\text{TE}} \hat{y}, \quad \mathbf{E}_{\text{TM}} = E_{\text{TM}} (-\cos \theta' \hat{x} + \sin \theta' \hat{z}). \quad (79)$$

La última definición no depende de que θ' sea dibujable o no. Sólo estamos construyendo el vector más general, sin componente en la dirección y , que sea perpendicular al vector de onda \mathbf{k}_3 ,

$$\mathbf{k}_3 = \frac{\omega n'}{c} (\sin \theta' \hat{x} + \cos \theta' \hat{z}). \quad (80)$$

Conviene remarcar nuevamente que lo anterior no es la definición de \mathbf{k}_3 en términos de θ' , tal como se leería en un dibujo, sino la definición de θ' en términos de \mathbf{k}_3 . Por hipótesis $\sin \theta' =$

$n \sin \theta / n'$ es real, mientras que $\cos \theta' = i\zeta$ es imaginario puro. Usando todos estos resultados, queda

$$\begin{aligned}\hat{z} \cdot \mathbf{E}_3 \mathbf{E}_3^* &= E_{\text{TM}} \sin \theta' \left[E_{\text{TM}}^* (i\zeta \hat{x} + \sin \theta' \hat{z}) + E_{\text{TE}}^* \hat{y} \right] \\ &= |E_{\text{TM}}|^2 \sin \theta' \left(i\zeta \hat{x} + \sin \theta' \hat{z} \right) + E_{\text{TM}} E_{\text{TE}}^* \sin \theta' \hat{y}.\end{aligned}\quad (81)$$

Finalmente, reemplazando en la Ec. (77), obtenemos

$$\langle \mathbf{S}_3(\mathbf{r}) \rangle = \frac{c}{8\pi} \frac{c}{\omega \mu'} e^{-2\kappa z} \left\{ \left(|\mathbf{E}_3|^2 k_{\parallel} - 2\kappa \zeta |E_{\text{TM}}|^2 \sin \theta' \right) \hat{x} - 2\kappa \sin \theta' \text{Im}[E_{\text{TM}} E_{\text{TE}}^*] \hat{y} \right\}.\quad (82)$$

La relación entre κ y ζ figura en la Ec. (50), $\kappa = \omega n' \zeta / c$, y además tenemos que

$$k_{\parallel} = \frac{\omega n'}{c} \sin \theta'.\quad (83)$$

Luego,

$$\langle \mathbf{S}_3(\mathbf{r}) \rangle = \frac{c}{8\pi} \frac{n'}{\mu'} \sin \theta' e^{-2\kappa z} \left\{ \left(|\mathbf{E}_3|^2 - 2\zeta^2 |E_{\text{TM}}|^2 \right) \hat{x} - 2\zeta \text{Im}[E_{\text{TM}} E_{\text{TE}}^*] \hat{y} \right\}.\quad (84)$$

Nos reservamos para el final el paso más traicionero. Falta calcular $|\mathbf{E}_3|^2 = \mathbf{E}_3 \cdot \mathbf{E}_3^*$. Muy fácil, dirán ustedes, \mathbf{E}_3 es la suma de dos vectores, no sólo evidentemente ortogonales entre sí, sino con los respectivos conjugados,

$$\mathbf{E}_{\text{TE}} \cdot \mathbf{E}_{\text{TM}} = \mathbf{E}_{\text{TE}} \cdot \mathbf{E}_{\text{TM}}^* = 0.\quad (85)$$

Por lo tanto

$$|\mathbf{E}_3|^2 = |\mathbf{E}_{\text{TE}}|^2 + |\mathbf{E}_{\text{TM}}|^2.\quad (86)$$

Perfecto. Además, como \mathbf{E}_{TE} sólo tiene componente en y , es muy fácil ver que

$$|\mathbf{E}_{\text{TE}}| = |E_{\text{TE}}|^2.\quad (87)$$

Bárbaro. Ahora viene el punto en donde no hay que dejarse llevar por la costumbre adquirida en el álgebra de vectores reales. El módulo al cuadrado de \mathbf{E}_{TM} no es, en general, igual a $|E_{\text{TM}}|^2$, aunque \mathbf{E}_{TM} se escriba como un vector ordinario,

$$\mathbf{E}_{\text{TM}} = E_{\text{TM}}(-\cos \theta' \hat{x} + \sin \theta' \hat{z}).\quad (88)$$

¿Pueden ver por qué? En verdad resulta

$$|\mathbf{E}_{\text{TM}}|^2 = \mathbf{E}_{\text{TM}} \cdot \mathbf{E}_{\text{TM}}^* = |E_{\text{TM}}|^2 (\cos \theta' \cos^* \theta' + \sin^2 \theta'),\quad (89)$$

y, puesto que $\cos \theta' = i\zeta$, queda

$$|\mathbf{E}_{\text{TM}}|^2 = |E_{\text{TM}}|^2 (\zeta^2 + \sin^2 \theta').\quad (90)$$

Pero además $\zeta^2 = \sin^2 \theta' - 1$, de manera que

$$|\mathbf{E}_{\text{TM}}|^2 = |E_{\text{TM}}|^2 (2\zeta^2 + 1).\quad (91)$$

Si $\cos \theta'$ hubiera sido real, hubiéramos obtenido $\cos \theta' \cos^* \theta' + \sin^2 \theta' = 1$, y $|\mathbf{E}_{\text{TM}}|^2 = |\mathbf{E}_{\text{TM}}|^2$.

En resumen,

$$|\mathbf{E}_3|^2 = |\mathbf{E}_{\text{TE}}|^2 + (2\zeta^2 + 1)|\mathbf{E}_{\text{TM}}|^2, \quad (92)$$

y reemplazando en la Ec. (84) resulta

$$\langle \mathbf{S}_3(\mathbf{r}) \rangle = \frac{c}{8\pi} \frac{n'}{\mu'} \sin \theta' e^{-2\kappa z} \left\{ (|\mathbf{E}_{\text{TE}}|^2 + |\mathbf{E}_{\text{TM}}|^2) \hat{x} - 2\zeta \text{Im}[\mathbf{E}_{\text{TM}} \mathbf{E}_{\text{TE}}^*] \hat{y} \right\}. \quad (93)$$

Usando la ley de Snell podríamos escribir $n' \sin \theta' = n \sin \theta$. Recuerden que las amplitudes que figuran aquí son las de los campos transmitidos, de modo que $\mathbf{E}_{\text{TE}} = R_{\text{TE}} \mathbf{E}_{\text{TE}1}$, donde $\mathbf{E}_{\text{TE}1}$ es la amplitud de la componente TE de la onda incidente, y análogamente para \mathbf{E}_{TM} .

Hay varias cosas para decir del resultado (93). Primero, no hay (en promedio) flujo de energía en la dirección z , lo que está emparentado con el hecho de que la amplitud de la onda reflejada sea igual, salvo por una fase, a la de la onda incidente. Segundo, la divergencia de $\langle \mathbf{S}_3 \rangle$ es cero, pues es una función vectorial de z que tiene componentes únicamente en las direcciones x e y . Esto es una verificación de la ley de conservación local de la energía, Ec. (72). Tercero, de manera un poco inesperada, hay un flujo de energía neto paralelo a la interfase, y, más inesperadamente aún, en la dirección perpendicular al plano de incidencia. El flujo de energía en la dirección y es el resultado de la interferencia entre los modos TE y TM, y no existe si la amplitud de alguno de ellos es cero. Sea el caso que sea, el flujo de energía paralelo a la interfase decae exponencialmente según el factor $e^{-2\kappa z}$.