¿Por qué k^μ es un cuadrivector?*

PODEMOS decir algo acerca de por qué la frecuencia y el vector número de onda forman un cuadrivector. La respuesta corta es: onda plana en un sistema, onda plana en todos.

La idea es mostrar que si en un sistema tienen una onda plana de lo que sea, en cualquier otro sistema tendrán una onda plana, y las componentes del vector número de onda y de la frecuencia transformarán como un cuadrivector. En esencia, lo que vamos a demostrar no es que $(\omega/c, \mathbf{k})$ es de por sí un cuadrivector, sino que podemos definirlo operacionalmente como tal. De esa manera evitamos recurrir a la tan mentada "invariancia" de la fase. Cambian las longitudes, cambian los campos, cambian los tiempos, ¿por qué la fase habría de ser un invariante? Aquí la invariancia de la fase va a ser uno de nuestros corolarios, no un punto de partida.

Supongamos que en un sistema S se propaga una onda plana con frecuencia ω y número de onda $\mathbf{k}$. No importa mayormente qué es lo se propaga, sino sólo la dependencia funcional en las variables $\mathbf{r}$ y t. En el sistema S la onda se escribirá como

$$A(\mathbf{r}, t) = A_0 \, \exp\Big[i \, (\mathbf{r} \cdot \mathbf{k} - \omega t) \Big]. \tag{1}$$

Así como uno distingue en $\mathbb{R}^3$ entre un punto P y sus coordenadas $\mathbf{r}$, podemos decir que cada punto del espacio–tiempo tiene una entidad independiente del sistema de referencia. Pueden pensarlo en términos de sucesos instantáneos: un punto del espacio tiempo podría etiquetarse como "desintegración de la partícula A", o "la partícula A y la partícula B coinciden momentáneamente en el mismo punto del espacio". Este tipo de caracterización es independiente del sistema de referencia o, al menos, es difícil imaginar que no lo sea. Usaremos la notación E para nombrar los puntos del espacio–tiempo. Cada punto del espacio–tiempo puede caracterizarse por coordenadas que dependen del sistema de referencia. Un mismo evento E tendrá en S coordenadas $(\mathbf{r}, t)$ y, en otro sistema S', coordenadas $(\mathbf{r}', t')$.

En cada punto del espacio–tiempo, en S tenemos un evento que se expresa diciendo que en tal momento y en tal posición el valor del campo A es $A_0 \, \exp[i \, (\mathbf{r} \cdot \mathbf{k} - \omega t)]$. Si en un dado punto E del espacio–tiempo, se mide en S un valor del campo A igual a $A_S(E)$, el mismo evento en

*¿Cómo conduzco? comuníquese gratuitamente a zanellaj@df.uba.ar

S' estará caracterizado por un valor del campo $A_{S'}(E)$. Alguna relación habrá que vincule los campos medidos en uno y otro sistema en el mismo punto E. Digamos

$$A_{S'}(E) = \mathbf{T}[A_S(E)]. \tag{2}$$

Asumiremos que la magnitud representada por el campo A transforma como un tensor ante las transformaciones de Lorentz. El campo A puede ser un escalar, un cuadrivector o, en general, un tensor de cualquier orden. Sin embargo, esa hipótesis puede relajarse, pues lo único que usaremos en la demostración será que la transformación es lineal, es decir,

$$\mathbf{T}[\alpha A_S] = \alpha \mathbf{T}[A_S]. \tag{3}$$

Resumiendo, conocido el campo A_S medido en S tendremos el campo $A_{S'}$ medido en S', relacionados a través de la ec. (2).

El evento E puede caracterizarse tanto con las coordenadas de S como con las de S'. Pero como el dato es que en S vale la ec. (1), lo más inmediato, si se quiere obtener el campo en S', es expresar primero todo en las coordenadas de S, aun el campo medido en S'. Designando con $(\mathbf{r}, t)_S$ las coordenadas del evento E medidas en S, podemos escribir

$$A_{S'}(\mathbf{r}, t)_S = \mathbf{T}[A_S(\mathbf{r}, t)_S]. \tag{4}$$

Así, momentáneamente, el campo en S' queda escrito no en función de las coordenadas del evento medidas en S' sino en S. Es como si un horario de trenes en Retiro fuera expresado en términos de la hora en Madrid.

Para dejar todo en función de cantidades medidas en S' hay que escribir $\mathbf{r}$ y t en términos de las coordenadas del evento E medidas en S',

$$\Big\{\mathbf{r} \to \mathbf{r}(\mathbf{r}', t')_{S'}, t \to t(\mathbf{r}', t')_{S'}\Big\}. \tag{5}$$

Finalmente,

$$A_{S'}(\mathbf{r}', t')_{S'} = \mathbf{T}\left[A_S\Big(\mathbf{r}(\mathbf{r}', t')_{S'}, t(\mathbf{r}', t')_{S'}\Big)_S\right]. \tag{6}$$

Los conmino a que hagan este mismo razonamiento para la rotación de un campo ordinario en $\mathbb{R}^3$. Si conocen el campo en S, y quieren conocer el campo en un punto con coordenadas $(\mathbf{r}')_{S'}$ en S', antes que nada deben ver cuáles son las coordenadas de ese mismo punto según S. Entonces ya saben en que ubicación deben medir el campo en S. Lo que falta hacer es transformar el valor del campo en sí. Si es un vector, rotará, si es un escalar no habrá que hacer ninguna operación extra. Por ejemplo, escriban detalladamente cómo transformaría un campo de temperaturas, $T(\mathbf{r})_S$, cuando pasan a un sistema S' rotado respecto de S. Deberían escribir algo muy parecido a la ec. (6). Si no pueden entender esto, entonces no tiene mucho caso que sigan adelante.

En general, no se llega al extremo de minuciosidad de mostrar constantemente a cuál sistema pertenecen cuáles coordenadas. Si se escribe $\mathbf{r}'$ se entiende que son las coordenadas de un punto según S', sin necesidad de escribir $(\mathbf{r}')_{S'}$. Es un asunto de convención y de eficiencia.

Las relaciones entre las coordenadas de uno y otro sistema están dadas por las transformaciones de Lorentz. En forma vectorial

$$\mathbf{r}(\mathbf{r}',t')_{S'} = \mathbf{r}'_\perp + \gamma\left(\mathbf{r}'_{||} + \mathbf{v}t'\right), \qquad t(\mathbf{r}',t')_{S'} = \gamma\left(t' + \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{r}'}{c^2}\right). \tag{7}$$

Aquí $\mathbf{r}'_\perp$ y $\mathbf{r}'_{||}$ son las componentes de $\mathbf{r}'$, medidas en S', en las direcciones perpendiculares y paralelas a $\mathbf{v}$, respectivamente,

$$\mathbf{r}'_{||} = \frac{1}{v^2}(\mathbf{r}'\cdot\mathbf{v})\,\mathbf{v}, \qquad \mathbf{r}'_\perp = \mathbf{r}' - \mathbf{r}'_{||}. \tag{8}$$

La velocidad $\mathbf{v}$ es la velocidad relativa de S' respecto de S.

Volviendo a la ec. (6) y aplicando las sustituciones (7) para un campo de la forma (1), resulta (y este es el paso esencial)

$$\begin{aligned} &A_{S'}(\mathbf{r}',t')_{S'} = \\ &\quad \mathbf{T}[A_0]\,\exp\left[i\left(\mathbf{r}'_\perp\cdot\mathbf{k} + \gamma\mathbf{r}'_{||}\cdot\mathbf{k} + \gamma t'\,\mathbf{v}\cdot\mathbf{k} - \gamma\omega t' - \gamma\omega\frac{v}{c^2}r'_{||}\right)\right]. \end{aligned} \tag{9}$$

Escribiendo $\mathbf{k} = \mathbf{k}_{||} + \mathbf{k}_\perp$ y agrupando por un lado todo lo que es proporcional a t' y por otro todo lo que es proporcional a $\mathbf{r}'_{||}$ y $\mathbf{r}'_\perp$, dentro de la exponencial encontrarán la siguiente expresión

$$\mathbf{r}'\cdot\left[\mathbf{k}_\perp + \gamma\left(\mathbf{k}_{||} - \frac{\omega}{c^2}\,\mathbf{v}\right)\right] - \gamma\,(\omega - \mathbf{v}\cdot\mathbf{k})\,t'. \tag{10}$$

De manera que, en S', el campo $A_{S'}$ tiene también la forma de una onda plana,

$$A_{S'}(\mathbf{r}',t')_{S'} = A'_0\,\exp\Big[i\,(\mathbf{r}'\cdot\mathbf{k}' - \omega' t')\Big], \tag{11}$$

donde

$$A'_0 = \mathbf{T}[A_0] \tag{12}$$

y

$$\mathbf{k}' = \mathbf{k}_\perp + \gamma\left(\mathbf{k}_{||} - \frac{\omega}{c^2}\,\mathbf{v}\right), \qquad \omega' = \gamma\,(\omega - \mathbf{v}\cdot\mathbf{k})\,. \tag{13}$$

Pero entonces se ve explícitamente que el vector de onda y la frecuencia en S' se obtienen a partir de los de S combinando $\mathbf{k}$ y ω tal como si fueran las componentes de un cuadrivector, pues copian el mismo modelo de transformación que las coordenadas $\mathbf{r}$ y t.

No es que ω y $\mathbf{k}$ formaran de por sí un cuadrivector. Demostramos que podemos definir un cuadrivector $(\omega/c, \mathbf{k})$ de modo que, al pasar de un sistema a otro, las ondas planas se transforman en ondas planas, con frecuencia y vector número de onda obtenidos a partir de los originales tal como si fueran las componentes de un cuadrivector. Entonces, lo definimos como tal. En especial, podemos afirmar que la fase

$$\omega t - \mathbf{r} \cdot \mathbf{k} = x^{\mu} k_{\mu} \tag{14}$$

debe ser un invariante.

Notas

- En la identificación de $(\omega/c, \mathbf{k})$ como cuadrivector número de onda, la función exponencial no tuvo ningún lugar fundamental. Lo mismo hubiera dado proponer una onda de la forma

$$A(\mathbf{r}, t) = A_0\, f\left(\mathbf{r} \cdot \mathbf{k} - \omega t\right), \tag{15}$$

con cualquier función f. Lo único esencial fue que las variables $\mathbf{r}$ y t aparecieran en una combinación del tipo

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{a} + bt. \tag{16}$$

- En cálculo tensorial existe un teorema recíproco a lo que hicimos más arriba. Se llama *ley del cociente* y dice que, dada una cosa con índices, si su producto escalar con cualquier tensor de cierto orden da un tensor, entonces esa cosa con índices también es un tensor. Por ejemplo, la cosa con índices podría ser el objeto $k^i = (k^0, k^1, k^2, k^3) = (\omega/c, \mathbf{k})$. Los tensores de prueba podrían ser los cuadrivectores posición $x^{\mu} = (ct, \mathbf{r})$. Si, por medio de algún argumento, pudiésemos afirmar que la fase (es decir, el producto escalar de k^i con x^{μ}) es un invariante, entonces podríamos afirmar que $(\omega/c, \mathbf{k})$ es un cuadrivector.

El problema, entonces, si se quiere usar la ley del cociente, es mostrar que la fase es un invariante. La manera usual de mostrarlo es haciendo trampa: se piensa a la sucesión de máximos de la onda como una sucesión de partículas que viajan con la velocidad de fase de la onda, en la dirección de $\mathbf{k}$ y separadas por una distancia λ. La trampa está en que eso no guarda una gran semejanza con una onda plana. Se está forzando una analogía. Lo notable es más bien que la cosa funcione, y entonces la pregunta sería ¿por qué?

Otro método usual para mostrar que $\mathbf{k}$ transforma como la componente espacial de un cuadrivector, consiste en calcular los sucesivos tiempos de paso de los frentes de onda (es decir, los máximos de la onda) por la posición de un observador en movimiento. La hipótesis *tácita* en este caso (o, si se quiere usar una palabra más fuerte, *injustificada*) es que los frentes de onda en un sistema inercial son frentes de onda en todos los sistemas. Esto puede tener sentido si se piensa en pulsos de luz, en lugar de ondas planas, pero entonces se trata de nuevo del problema considerado como si fueran partículas a velocidad c.

▪ Noten que, dados 4 números en S, (a, b, c, d), siempre podrían decir que forman un cuadrivector A^μ. Podrían encontrar cuánto vale A'^μ en S' a través de las transformaciones de Lorentz. Pero eso no tiene ningún significado en sí mismo. Lo que resulta fundamental es mostrar que la interpretación física de A^μ es la misma en todos los sistemas. Eso fue precisamente lo que acabamos de hacer con las cuatro cantidades $(\omega/c, \mathbf{k})$. Demostramos que si transformamos esas cantidades tal como transforman las componentes de un cuadrivector, entonces en el nuevo sistema las nuevas cuatro cantidades tienen el mismo significado físico que las originales.

Como contraejemplo sencillo tienen a los propios campos $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$. Nada les impediría, por ejemplo, definir un cuadrivector a través del campo eléctrico medido en S como

$$e^\mu = (E, \mathbf{E}), \tag{17}$$

por inventar algo. Alegremente lo podrían transformar de un sistema a otro. En S' tendrían

$$e'^\mu = (\textsc{Algo}, \mathfrak{algo}) \tag{18}$$

pero ni en sueños $\textsc{Algo}$ será el módulo del campo eléctrico en S' ni $\mathfrak{algo}$ serán sus componentes. Crearon una cosa que no tiene el mismo significado físico en todos los sistemas. Por más que insistan en transformarlo de un sistema a otro, eso no tendrá ningún contenido.

▪ Una cuestión interesante es que, para llegar a las ecuaciones (13), no ha sido necesario suponer que las ondas se propagaran a velocidad c.

En ningún momento usamos que el módulo del vector de onda fuese igual a ω/c. Si en lugar de luz en el vacío consideráramos luz en un medio con índice de refracción n, la frecuencia ω y el vector de onda $\mathbf{k}$ seguirían siendo las componentes de un cuadrivector. Por hipótesis, en el sistema en reposo del medio tendríamos $|\mathbf{k}| = n\omega/c$. En ese sistema el cuadrivector número de onda será

$$k^\mu = \frac{\omega}{c}\left(1, n\sin\theta\,\cos\varphi, n\sin\theta\,\sin\varphi, n\cos\theta\right). \tag{19}$$

En un sistema S' que se mueve respecto de S con velocidad $v\,\hat{z}$, la transformación de Lorentz da

$$k'^\mu = \frac{\omega}{c}\Big(\gamma\left(1 - n\beta\cos\theta\right), n\sin\theta\,\cos\varphi, n\sin\theta\,\sin\varphi, \gamma\left(n\cos\theta - \beta\right)\Big). \tag{20}$$

La frecuencia en el sistema S' resulta entonces

$$\omega' = \gamma\left(1 - n\beta\cos\theta\right). \tag{21}$$

Encontrar los nuevos ángulos de propagación en S' es un poco más laborioso. Cuando trabajamos con ondas en el vacío, usamos que en todos los sistemas de referencia vale $k = k' = \omega'/c$. En el sistema S' ya no podemos anticipar el valor de k', sino que habrá que calcularlo. En la ec. (20) puede verse que

$$\mathbf{k}' = \frac{\omega}{c}\big(n\sin\theta\,\cos\varphi, n\sin\theta\,\sin\varphi, \gamma\left(n\cos\theta - \beta\right)\big). \tag{22}$$

Ahora para obtener la dirección de $\mathbf{k}'$ habrá que calcular $\mathbf{n}' = \mathbf{k}'/k'$. El cálculo directo a partir de la ec. (22) muestra que

$$k'^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2\left[n^2\sin^2\theta + \gamma^2\left(n\cos\theta - \beta\right)^2\right]. \tag{23}$$

Pero este mismo resultado se obtiene con menos esfuerzo a través de la invariancia del módulo del cuadrivector k^μ, ya que

$$\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - k^2 = \left(\frac{\omega'}{c}\right)^2 - k'^2. \tag{24}$$

Conocen ω', y saben que $k^2 = (n\omega/c)^2$, de manera que pueden despejar k'^2. Notar que, aunque aún no está expresada en términos de ω' y θ', la relación de dispersión (23) en S' promete ser anisotrópica. Queda como ejercicio para ustedes escribir $k'^2(\omega', \theta')$.

Luego, volviendo al cálculo de la dirección de $\mathbf{k}'$, resulta

$$\frac{\mathbf{k}'}{k'} = \mathbf{n}' = (n'_x, n'_y, n'_z), \tag{25}$$

donde

$$n'_x = \frac{n \sin\theta \, \cos\varphi}{\left[n^2 \sin^2\theta + \gamma^2 (n\cos\theta - \beta)^2\right]^{1/2}} = \sin\theta' \, \cos\varphi', \tag{26}$$

$$n'_y = \frac{n \sin\theta \, \sin\varphi}{\left[n^2 \sin^2\theta + \gamma^2 (n\cos\theta - \beta)^2\right]^{1/2}} = \sin\theta' \, \sin\varphi', \tag{27}$$

$$n'_z = \frac{\gamma (n\cos\theta - \beta)}{\left[n^2 \sin^2\theta + \gamma^2 (n\cos\theta - \beta)^2\right]^{1/2}} = \cos\theta'. \tag{28}$$

El hecho de que $n'_y/n'_x = \tan\varphi$ implica $\varphi = \varphi'$, es decir, el ángulo azimutal no cambia. Por otro lado, el ángulo polar se lee directamente de la componente z de $\mathbf{n}'$, pues $\cos\theta' = n'_z$. La ley de transformación (28) para $\cos\theta$ es notablemente más complicada que aquella que se obtiene para ondas en el vacío,

$$\cos\theta' = \frac{\cos\theta - \beta}{1 - \beta\cos\theta}. \tag{29}$$