

Física Teórica 1 – 1er. cuatrimestre de 2017
Segundo Parcial (con soluciones)

■ **Problema 1.** Considerar el problema de una interfase plana entre dos dieléctricos con permitividades ϵ_1, μ_1 y ϵ_2, μ_2 (todas positivas), respectivamente y tales que $\epsilon_1\mu_1 = \epsilon_2\mu_2$. Una onda plana monocromática incide sobre la interfase desde el medio 1, formando un ángulo i con la normal a la superficie, y con su campo magnético perpendicular al plano de incidencia.

- a) Probar que la onda refractada mantiene la misma dirección de la onda incidente, y que su ~~amplitud~~ intensidad se atenúa por un factor independiente del ángulo de incidencia. ¿Qué relación debe cumplirse para que la amplitud de la onda reflejada sea igual a la de la transmitida?
- b) Demostrar explícitamente que la energía se conserva (es suficiente demostrar la conservación en promedio temporal).

■ **Solución:** a) Los índices de refracción son $n_1 = \sqrt{\epsilon_1\mu_1}$ y $n_2 = \sqrt{\epsilon_2\mu_2}$. Por ley de Snell, como $n_1 = n_2$, el ángulo de incidencia i es igual al ángulo de transmisión t . Puesto que el ángulo de reflexión r es de por sí igual al ángulo de incidencia, los tres ángulos son iguales.

Las ecuaciones que relacionan las amplitudes de las tres ondas son:

$$H_i + H_r = H_t, \quad (1)$$

$$(E_i - E_r) \cos i = E_t \cos t. \quad (2)$$

La igualdad de los ángulos, la relación $H_j = n_j E_j / \mu_j$ y el hecho de que $n_1 = n_2$ implican

$$\frac{1}{\mu_1} (E_i + E_r) = \frac{1}{\mu_2} E_t, \quad (3)$$

$$(E_i - E_r) = E_t, \quad (4)$$

y de aquí resultan:

$$E_r = \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} E_i \equiv r E_i, \quad (5)$$

$$E_t = \frac{2\mu_2}{\mu_1 + \mu_2} E_i \equiv t E_i. \quad (6)$$

Las amplitudes de la onda transmitida y de la onda reflejada son independientes del ángulo de incidencia, y, aunque t puede ser mayor que 1, comprobamos que la intensidad de la onda transmitida está en verdad atenuada:

$$\frac{\frac{n_2}{\mu_2} |E_t|^2}{\frac{n_1}{\mu_1} |E_i|^2} = \frac{\mu_1}{\mu_2} t^2 = \frac{4\mu_1\mu_2}{(\mu_1 + \mu_2)^2} \leq 1 \quad (7)$$

(media geométrica \leq media aritmética). La igualdad entre E_r y E_t se produce cuando $\mu_1 - \mu_2 = 2\mu_2$, es decir, cuando $\mu_1 = 3\mu_2$. En tal situación, $E_r = E_t = \frac{1}{2} E_i$.

b) La conservación *en promedio* equivale a $\langle \nabla \cdot \mathbf{S} \rangle = 0$. Como el problema tiene invariancia traslacional en el plano de la interfase, se trata de mostrar que $\langle \mathbf{n} \cdot \mathbf{S} \rangle$ es constante, donde \mathbf{n} es la normal a la interfase desde el primer al segundo medio. En el primer medio

$$\langle \mathbf{n} \cdot \mathbf{S}_1(\mathbf{r}, t) \rangle = \frac{c}{8\pi} \mathbf{n} \cdot \mathbf{Re} \left\{ \left[\mathbf{E}_i(\mathbf{r}, t) + \mathbf{E}_r(\mathbf{r}, t) \right] \times \left[\mathbf{H}_i(\mathbf{r}, t) + \mathbf{H}_r(\mathbf{r}, t) \right]^* \right\}. \quad (8)$$

Para calcular los términos de interferencia, aprovechamos que las direcciones de los vectores \mathbf{H}_i y \mathbf{H}_r son las mismas, lo que implica que $\mathbf{E}_i \times \mathbf{H}_r^* \propto \mathbf{E}_i \times \mathbf{H}_i^* \propto \hat{\mathbf{k}}_i$, y, análogamente, $\mathbf{E}_r \times \mathbf{H}_i^* \propto \hat{\mathbf{k}}_r$. Así resultan

$$\mathbf{E}_i(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{H}_r^*(\mathbf{r}, t) = \frac{n_1}{\mu_1} E_i E_r^* e^{i(\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_r) \cdot \mathbf{r}} \hat{\mathbf{k}}_i, \quad (9)$$

$$\mathbf{E}_r(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{H}_i^*(\mathbf{r}, t) = \frac{n_1}{\mu_1} E_r E_i^* e^{-i(\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_r) \cdot \mathbf{r}} \hat{\mathbf{k}}_r. \quad (10)$$

Además, eligiendo $\mathbf{n} = \hat{\mathbf{z}}$, tenemos $(\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_r) \cdot \mathbf{r} = 2zk_1 \cos i$. Entonces, la Ec. (8) se lee como

$$\langle \mathbf{n} \cdot \mathbf{S}_1(\mathbf{r}, t) \rangle = \frac{c}{8\pi} \frac{n_1}{\mu_1} \mathbf{n} \cdot \mathbf{Re} \left[|E_i|^2 \hat{\mathbf{k}}_i + |E_r|^2 \hat{\mathbf{k}}_r + E_i E_r^* e^{2ik_1 z \cos i} \hat{\mathbf{k}}_i + E_r E_i^* e^{-2ik_1 z \cos i} \hat{\mathbf{k}}_r \right]. \quad (11)$$

Teniendo en cuenta que $\mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{k}}_i = \cos i$ y que $\mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{k}}_r = -\cos i$, los términos de interferencia tienen parte real nula. Luego, usando que $E_r = r E_i$, resulta

$$\langle \mathbf{n} \cdot \mathbf{S}_1 \rangle = \frac{c}{8\pi} \frac{n_1}{\mu_1} (1 - r^2) |E_i|^2 \cos i, \quad (12)$$

independiente de z . En el segundo medio el cálculo es más sencillo:

$$\langle \mathbf{n} \cdot \mathbf{S}_2 \rangle = \frac{c}{8\pi} \frac{n_2}{\mu_2} t^2 |E_i|^2 \cos r, \quad (13)$$

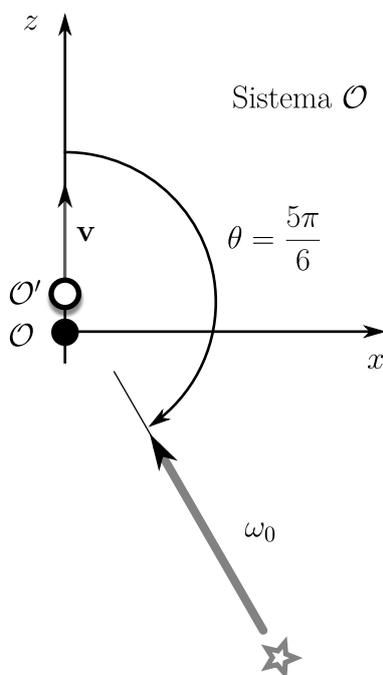
también independiente de z . Si se usa que $\cos i = \cos r$ y que $n_1 = n_2$, hay que mostrar entonces que vale la igualdad

$$\frac{1}{\mu_1} (1 - r^2) = \frac{1}{\mu_2} t^2, \quad (14)$$

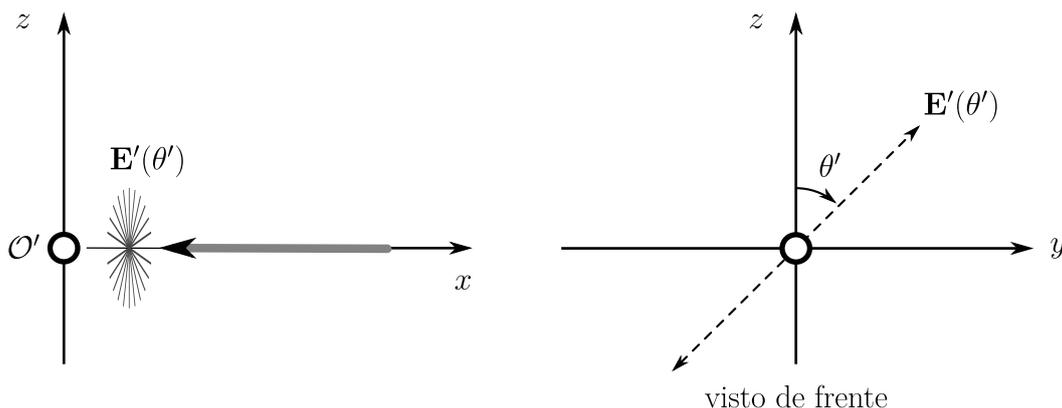
lo que, en efecto, sucede, ya que

$$\frac{1}{\mu_1} \left[1 - \left(\frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \right)^2 \right] = \frac{1}{\mu_2} \left(\frac{2\mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \right)^2. \quad (15)$$

■ **Problema 2.** El observador \mathcal{O}' se mueve con velocidad relativa \mathbf{v} respecto de \mathcal{O} , cuyo último domicilio declarado es el planeta Tierra. Ambos observadores eligen su eje z en la dirección de \mathbf{v} , de modo que, según \mathcal{O} , la velocidad de \mathcal{O}' es igual a $v\hat{\mathbf{z}}$, con $v > 0$. En cierto instante, los dos observadores prácticamente coinciden en el mismo punto del espacio. En ese momento, los dos reciben luz proveniente de una misma estrella muy lejana, de nombre Betelgeuse. Vista desde la Tierra, Betelgeuse tiene un característico color anaranjado, $\lambda_0 = 600 \text{ nm}$; a todos los efectos prácticos puede considerarse una fuente monocromática, con la correspondiente frecuencia $\omega_0 = 2\pi c/\lambda_0$, según \mathcal{O} . El observador \mathcal{O} ve la estrella en $\varphi = 0$ y $\theta = 5\pi/6$, como muestra la figura.



- a) ¿En qué dirección ve la estrella \mathcal{O}' ?
- b) Si ω' es la frecuencia vista por \mathcal{O}' , **graficar** ω'/ω_0 en función de $\beta = v/c$, para β entre 0 y 1. Indicar la posición del mínimo y el valor de ω'/ω_0 en ese punto.
- c) Asuma que las longitudes de onda visibles son las comprendidas entre 400 nm y 800 nm. Es decir, $\omega_{\max} = \frac{3}{2}\omega_0$ y $\omega_{\min} = \frac{3}{4}\omega_0$. Suponiendo que el observador \mathcal{O}' acelera sucesivamente desde velocidad $v = 0$ hasta una velocidad arbitrariamente próxima a la de la luz, ¿para qué rango de velocidades es capaz de ver la estrella? Calcular la secuencia de valores de β para los cuales la estrella desaparece o aparece en el cielo de \mathcal{O}' .
- d) Encontrar las direcciones, en su propio sistema, en las que \mathcal{O}' ve la secuencia de desapariciones y apariciones de la estrella a medida que acelera.
- e) Cada observador usa un polarizador lineal para medir la *intensidad* $I = |\mathbf{E}|^2$ en función del ángulo de polarización. El observador en la Tierra mide que la intensidad es una constante I_0 que no depende de la polarización. Encontrar la intensidad en función del ángulo de polarización (definido como muestra la figura en la siguiente página) que mide el observador \mathcal{O}' cuando la luz de la estrella le llega desde la dirección x .



■ **Solución:** a) En el sistema \mathcal{O} los cuadrivectores de las ondas incidentes son

$$k^\mu = \frac{\omega_0}{c}(1, -\sin \theta, 0, -\cos \theta). \quad (16)$$

Transformando al sistema \mathcal{O}' se obtiene

$$k'^\mu = (1 + \beta \cos \theta)\gamma \frac{\omega_0}{c} \left(1, -\frac{\sin \theta}{(1 + \beta \cos \theta)\gamma}, 0, -\frac{\cos \theta + \beta}{1 + \beta \cos \theta} \right). \quad (17)$$

De aquí leemos la frecuencia y la dirección en el sistema \mathcal{O}' ,

$$\omega' = (1 + \beta \cos \theta)\gamma \omega_0, \quad \cos \theta' = \frac{\cos \theta + \beta}{1 + \beta \cos \theta}, \quad \varphi' = 0. \quad (18)$$

Es importante verificar que ocurre lo que uno esperaría intuitivamente. El ángulo θ' debería ser más chico que θ , y en efecto así ocurre, puesto que su coseno aumenta. Por otro lado, para ángulos de incidencia próximos a la dirección $\theta = 0$, la frecuencia debería aumentar, lo que también se verifica. En el caso particular de la estrella Betelgeuse resulta

$$\omega' = \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\beta\right)\gamma \omega_0, \quad \cos \theta' = \frac{\sqrt{3} - 2\beta}{\beta\sqrt{3} - 2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\beta}{4} + \dots \quad (19)$$

b) Según lo anterior, la frecuencia que mide \mathcal{O}' está dada por

$$\frac{\omega'(\beta)}{\omega_0} = (1 + \beta \cos \theta)\gamma. \quad (20)$$

La función que tenemos que graficar es

$$f(\beta) = \frac{1 - y\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (21)$$

donde $y = -\cos(5\pi/6) = \sqrt{3}/2$. Debido a que β es menor que 1, $f(\beta)$ es siempre mayor que cero. Para $\beta \ll 1$, resulta

$$f(\beta) = (1 - y\beta) \left(1 + \frac{1}{2}\beta^2 + \dots\right) \simeq 1 - y\beta + \frac{1}{2}\beta^2. \quad (22)$$

Así, la función $f(\beta)$ parte de 1, con derivada negativa pero concavidad positiva. Por otro lado, para $\beta \rightarrow 1$

$$1 - y\beta \rightarrow 1 - y, \quad \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - \beta}}. \quad (23)$$

y la función $f(\beta)$ tiende a infinito como

$$f(\beta) \sim \frac{1 - y}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - \beta}}. \quad (24)$$

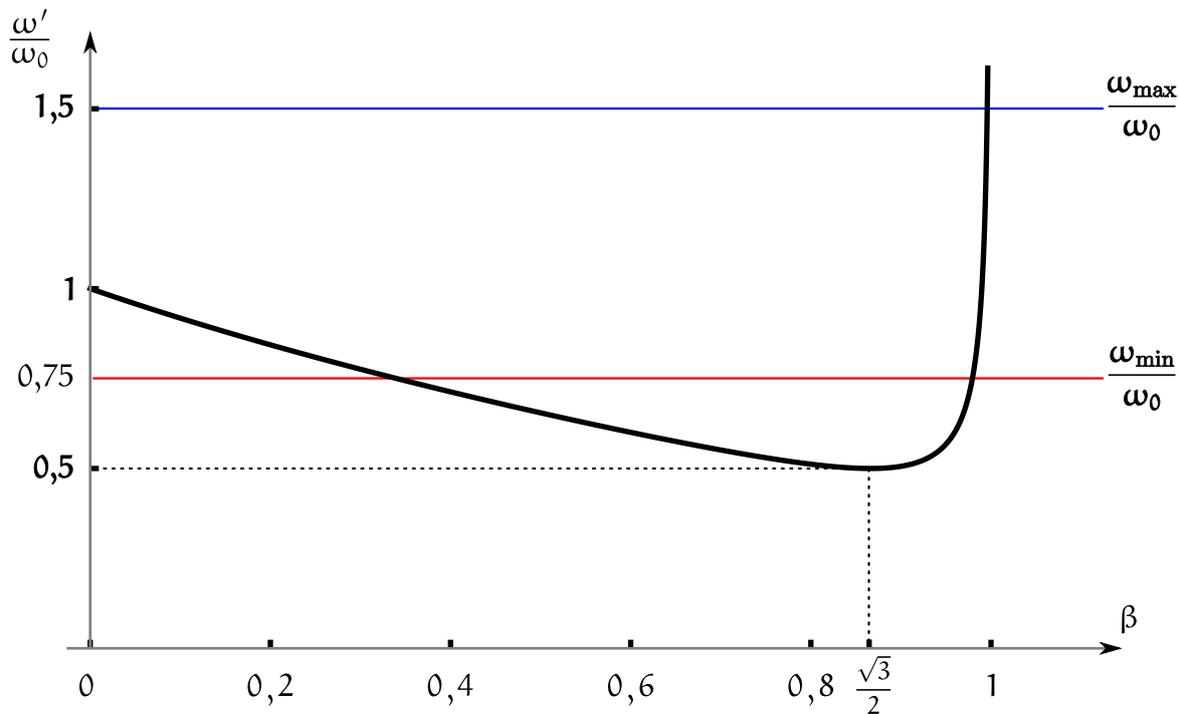
Esto significa que en algún punto del intervalo $[0, 1)$ la función debe tener extremos locales. Esto se puede confirmar calculando su derivada,

$$f'(\beta) = \frac{-y(1 - \beta^2) + (1 - y\beta)\beta}{(1 - \beta^2)^{3/2}} = \frac{-y + \beta}{(1 - \beta^2)^{3/2}}, \quad (25)$$

que se anula únicamente en $\beta = y$, donde la función toma el valor

$$f(y) = \sqrt{1 - y^2} = \frac{1}{2}. \quad (26)$$

A uno y otro lado de $\beta = y$ el signo de la derivada es constante. Puesto que la función tiende a 1 cuando β tiende a cero, y a infinito cuando β tiende a 1, no queda otra alternativa que el punto $\beta = y$ sea un mínimo. La función por lo tanto tiene que tener esta forma:



No es casual que el mínimo de ω' se alcance justo cuando $\beta = -\cos\theta$. Ese valor de la velocidad corresponde al caso en que θ' recibe la luz de la estrella desde la dirección $\theta' = \pi/2$. A partir de ese valor de β , la luz de la estrella comienza a llegarle de frente, y por lo tanto su frecuencia empieza a aumentar.

c) Como muestra la figura anterior, el mínimo valor de la frecuencia ω' como función de β es $\frac{1}{2}\omega_0$. Esto está por debajo de la frecuencia mínima visible, $\omega_{\min} = \frac{3}{4}\omega_0$. Por lo tanto, habrá un par de valores de β tales que, si $\beta_1 < \beta < \beta_2$, entonces $\omega'(\beta)$ será menor que ω_{\min} . Estos valores se obtienen igualando ω' a ω_{\min} , es decir, escribiendo

$$\frac{1 - y\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{3}{4}, \quad (27)$$

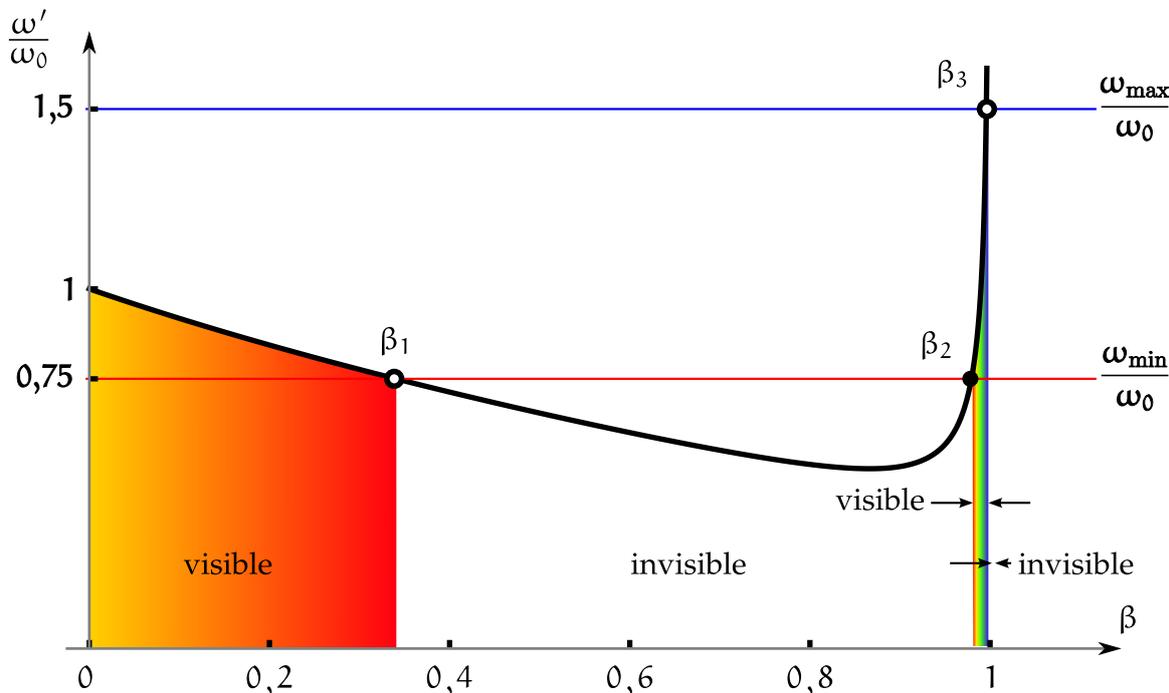
Notar que $y = \sqrt{3}/2$. Entonces resulta la ecuación:

$$21\beta^2 - 16\sqrt{3}\beta + 7 = 0. \quad (28)$$

El valor de las raíces no era del todo relevante. Lo importante era darse cuenta de que, cuando β aumenta desde cero, la estrella desaparece y vuelve a aparecer, porque la curva $\omega'(\beta)$ corta dos veces a la recta ω_{\min} dentro del intervalo $0 \leq \beta < 1$. Explícitamente, los valores de β que marcan los límites del intervalo de invisibilidad son

$$\beta_1 = \frac{1}{21} (8\sqrt{3} - 3\sqrt{5}) \approx 0,3404 \quad \beta_2 = \frac{1}{21} (8\sqrt{3} + 3\sqrt{5}) \approx 0,9793 \quad (29)$$

Entre β_1 y β_2 la estrella es invisible para \mathcal{O}' , pero cuando β sobrepasa el valor β_2 la estrella vuelve a ser visible. Sin embargo, debido a que ω' toma valores arbitrariamente grandes al aproximarse β a uno, es obvio que la estrella volverá a desaparecer, esta vez por el extremo opuesto del espectro. Habrá entonces un tercer valor de β en la secuencia de desapariciones y apariciones. La monotonía de la función $f(\beta)$ para $\beta > \frac{\sqrt{3}}{2}$ asegura que no habrá más.



El valor de β que hace que ω' sea igual a ω_{\max} se obtiene a partir de esta otra ecuación:

$$\frac{1 - \gamma\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{3}{2}. \quad (30)$$

De aquí resultan los valores

$$\beta_{\pm} = \frac{1}{6} (\sqrt{3} \pm 3\sqrt{2}). \quad (31)$$

La raíz que nos interesa es la que tiene signo positivo, la otra corresponde al movimiento en el sentido opuesto (lo que es razonable, porque en ese caso \mathcal{O}' viaja de frente hacia la estrella y esperamos que la frecuencia aumente de manera monótona). Resumiendo: cuando β supera el valor

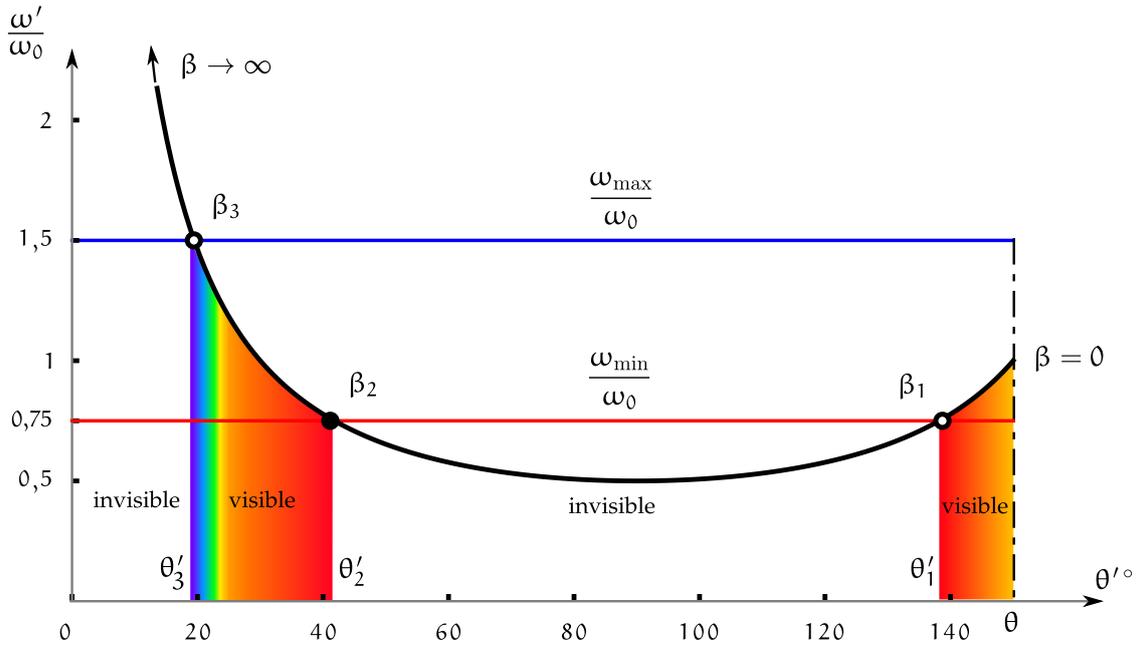
$$\beta_3 = \frac{1}{6} (\sqrt{3} + 3\sqrt{2}) \approx 0,9958 \quad (32)$$

la estrella desaparece por segunda vez, pero ahora por el extremo violeta del espectro. En la figura anterior, la separación entre β_2 y β_3 es pequeña pero distinguible. En cambio el intervalo que hay entre β_3 y $\beta = 1$ queda por debajo de la resolución del gráfico.

d) Los ángulos de observación que corresponden a la secuencia de valores β_1 , β_2 y β_3 se obtienen a partir de la Ec. (18):

$$\theta'_1 \approx 138,2^\circ \quad \theta'_2 \approx 41,8^\circ \quad \theta'_3 \approx 19,5^\circ \quad (33)$$

Es un buen ejercicio escribir ω' en función del propio ángulo θ' . Eso implica eliminar β de las ecuaciones anteriores. El resultado se ilustra en la figura siguiente.



Es un gráfico un poco más abierto que el de $\omega'(\beta)$. La secuencia de valores de los ángulos para los cuales la estrella desaparece y aparece es menos densa que la secuencia de valores de β . Notar que la diferencia entre β_2 , cuando la estrella recupera visibilidad, y β_3 , cuando vuelve a desaparecer, es apenas 0,03, mientras que la diferencia en los ángulos θ'_2 y θ'_3 es de unos 20° , perfectamente discernible en el gráfico.

e) La forma más fácil de encontrar la intensidad en función de la polarización en el sistema \mathcal{O}' es resistir el primer impulso de hacer una transformación de \mathcal{O} hacia \mathcal{O}' , y en lugar de eso hacer la transformación inversa. Supongamos que \mathcal{O}' mide un campo eléctrico de amplitud \mathbf{E}' en la dirección de polarización θ' , es decir, un vector de la forma

$$\mathbf{E}' = (\sin \theta' \hat{y} + \cos \theta' \hat{z})\mathbf{E}', \quad (34)$$

que lleva asociada una amplitud del campo magnético

$$\mathbf{B}' = -\hat{x} \times \mathbf{E}' = (-\sin \theta' \hat{z} + \cos \theta' \hat{y})\mathbf{E}'. \quad (35)$$

Mediante una transformación de Lorentz de \mathcal{O}' a \mathcal{O} podemos predecir que, si \mathcal{O} midiera la amplitud del campo eléctrico correspondiente a la misma onda, obtendría lo siguiente:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= E' \cos \theta' \hat{z} + \gamma E' \left[\sin \theta' \hat{y} - \beta \hat{z} \times (-\sin \theta' \hat{z} + \cos \theta' \hat{y}) \right] \\ &= E' \cos \theta' \hat{z} + \gamma E' \left[\sin \theta' \hat{y} + \beta \cos \theta' \hat{x} \right]. \end{aligned} \quad (36)$$

La intensidad medida por \mathcal{O} sería

$$|\mathbf{E}|^2 = |E'|^2 \gamma^2 \left[(1 - \beta^2) \cos^2 \theta' + \sin^2 \theta' + \beta^2 \cos^2 \theta' \right] = |E'|^2 \gamma^2. \quad (37)$$

Vemos entonces que para que la intensidad según \mathcal{O} no dependa de la dirección de polarización, la intensidad según \mathcal{O}' tiene que ser asimismo independiente de θ' .

Si siguiéramos el impulso natural de transformar de \mathcal{O} a \mathcal{O}' , el cálculo sería más complicado, porque la amplitud de la onda según \mathcal{O} se escribe en una base más incómoda. El

esfuerzo vale la pena, porque se encuentra un resultado más general, y hasta cierto punto sorprendente.

Siguiendo el método anterior de transformar de \mathcal{O}' a \mathcal{O} , teníamos la ventaja de que la onda en \mathcal{O}' se propagaba según el eje x . Así resultó muy sencillo describir la polarización en \mathcal{O}' usando como versores de referencia los vectores \hat{y} y \hat{z} . Ahora tenemos que encontrar el modo de describir la polarización según \mathcal{O} , que observa una onda que no se propaga según ninguno de los ejes coordenados. Hay que elegir una base de versores en el plano perpendicular al vector de onda. Una alternativa es decir que \mathcal{O} mide el ángulo de polarización usando como direcciones de referencia los versores \hat{y} y

$$\hat{e} = \sin \theta \hat{z} - \cos \theta \hat{x}, \quad (38)$$

que forman una base de vectores normales a la dirección de propagación,

$$\hat{k} = -(\sin \theta \hat{x} + \cos \theta \hat{z}) \quad (39)$$

Entonces, la amplitud del campo eléctrico de una onda polarizada en un ángulo α respecto de \hat{e} sería

$$\mathbf{E} = (\cos \alpha \hat{e} + \sin \alpha \hat{y})E, \quad (40)$$

con un campo magnético asociado de amplitud $\mathbf{B} = (-\sin \alpha \hat{e} + \cos \alpha \hat{y})E$. La transformación al sistema \mathcal{O}' da:

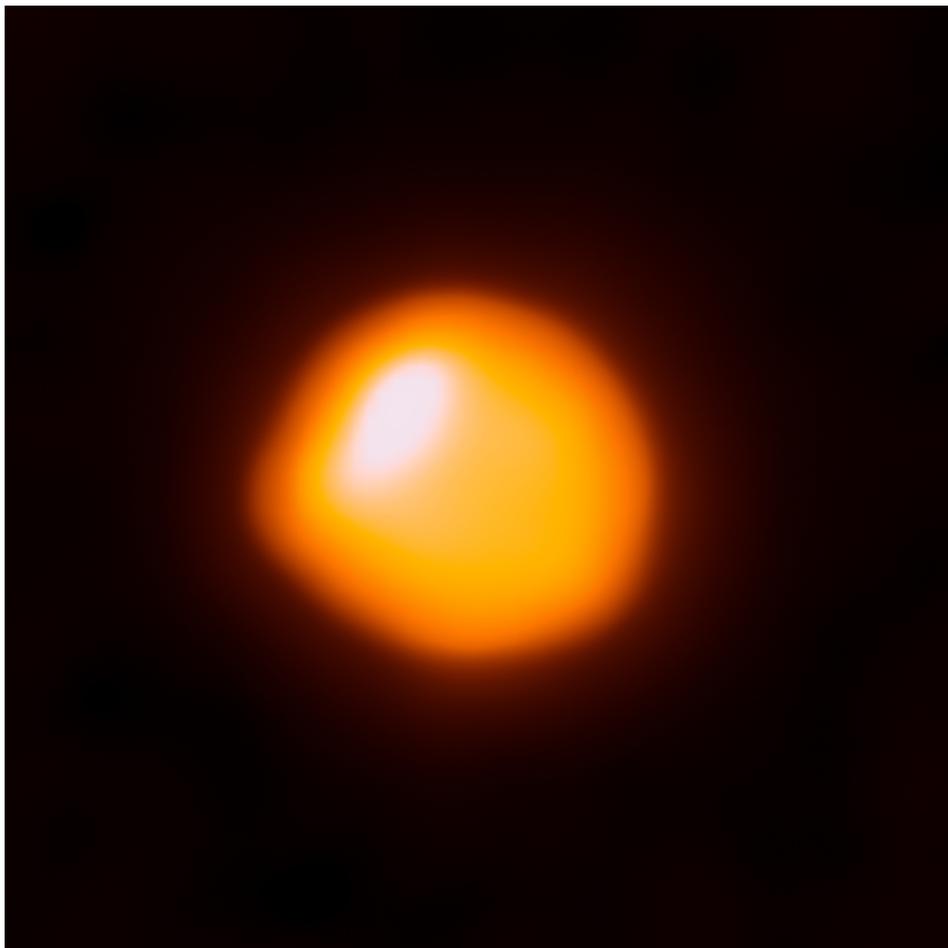
$$\begin{aligned} \mathbf{E}' &= E \cos \alpha \sin \theta \hat{z} + E\gamma \left[-\cos \alpha \cos \theta \hat{x} + \sin \alpha \hat{y} + \beta \hat{z} \times (\sin \alpha \cos \theta \hat{x} + \cos \alpha \hat{y}) \right] \\ &= E \cos \alpha \sin \theta \hat{z} + E\gamma \left[-\cos \alpha (\cos \theta + \beta) \hat{x} + \sin \alpha (1 + \beta \cos \theta) \hat{y} \right]. \end{aligned} \quad (41)$$

Luego, la intensidad según \mathcal{O}' es (no queda otra que hacer la cuenta)

$$|\mathbf{E}'|^2 = |E|^2 \gamma^2 (1 + \beta \cos \theta)^2. \quad (42)$$

Esto muestra que, al igual que en \mathcal{O} , la intensidad en \mathcal{O}' es independiente de la dirección de polarización. Aunque hubo que hacer más cuentas, el método tiene la ventaja de que su conclusión es general: en ningún momento usamos que β era tal que la dirección de propagación según \mathcal{O}' era paralela a \hat{x} . Es un resultado de por sí interesante.

En el enunciado del parcial la palabra intensidad aparecía en cursivas, dando a entender que su significado no debía tomarse en un sentido literal. Para describir una fuente de luz natural en términos de intensidades según el ángulo de polarización, no alcanza con dar la amplitud del campo eléctrico en función del ángulo, también hay que dar una medida de la densidad de ondas en función del ángulo. No hemos visto cómo cambia esa densidad. En otras palabras, no sabemos cuál es la relación entre el ángulo de polarización α y el ángulo de polarización α' . Las ondas que se propagan con una polarización en un intervalo $\delta\alpha$ alrededor de α irán a parar a un intervalo $\delta\alpha'$ alrededor de α' . De la relación que exista entre $\delta\alpha$ y $\delta\alpha'$ dependerá que las ondas se concentren más en una dirección que en otra, aunque en el sistema original la distribución fuese isótropa. Encontrar la relación entre $\delta\alpha$ y $\delta\alpha'$ queda como ejercicio. No hay necesidad de que lo hagan a mano. Lo importante es saber qué cosas plantear. Es irrelevante si luego usan la computadora para resolver las ecuaciones. El resultado, les prometo, es formidable.

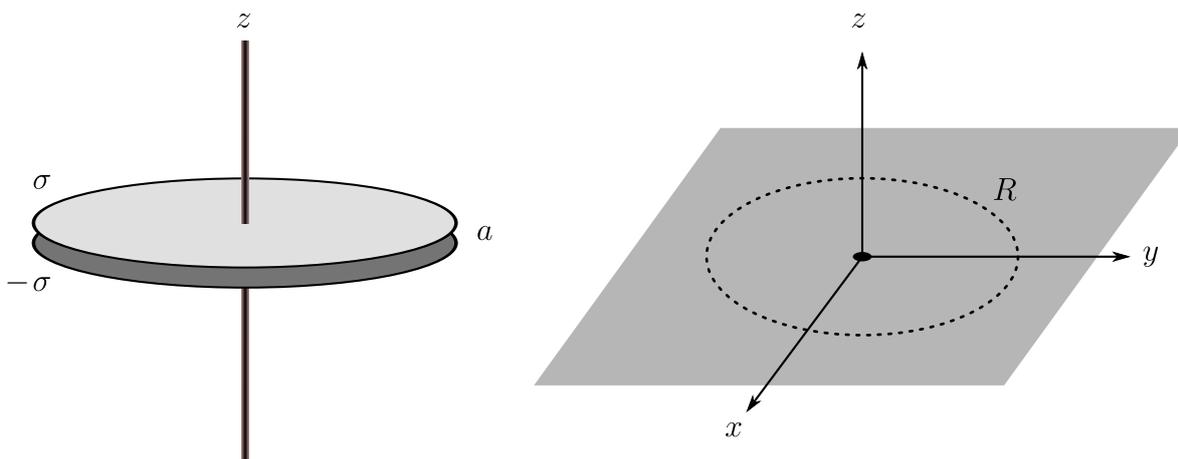


Betelgeuse en persona. <http://www.eso.org/public/unitedkingdom/images/potw1726a/>

■ **Problema 3.** Dos discos de radio a están cargados uniformemente en superficie con densidades σ y $-\sigma$, respectivamente. Los discos están en el plano xy , centrados en el origen, uno sobre el otro a una distancia despreciable y pueden rotar de manera independiente alrededor del eje z . Inicialmente están en reposo. Desde $t = 0$ hasta $t = T$ se aplican sobre los discos torques de sentidos opuestos, pero de la misma magnitud:

$$\tau(t) = \tau_0 \sin^2 \left(\frac{\pi t}{T} \right),$$

de modo que los discos giran siempre con velocidades angulares opuestas entre sí. El momento de inercia de los discos es I . Despreciar el torque debido a los campos inducidos.



- a) Encontrar los campos de radiación $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ y $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ hasta el primer orden no nulo en el desarrollo multipolar.
- b) Considerar un punto sobre el eje x a una distancia R del origen. Graficar el campo eléctrico de radiación y la intensidad por ángulo sólido en función del tiempo.
- c) Considerar un círculo de radio R en el plano xy centrado en el origen. Graficar en varias viñetas los campos de radiación \mathbf{E} y \mathbf{B} sobre el círculo, de manera de representar cualitativamente su evolución para todo $t > 0$.
- d) Fijado $t > 0$, indique en el plano xy la región en donde la intensidad de la radiación es distinta de cero.
- e) Calcular la energía total radiada por los discos.

■ **Solución:** a) Como la superposición de los dos discos da como resultado una distribución con carga nula, los momentos multipolares eléctricos son todos cero. El momento magnético de un disco que gira a velocidad $\omega \hat{z}$ es

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2c} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \rho d\rho \sigma \rho \hat{\rho} \times (\omega \rho \hat{\phi}) = \frac{\omega a Q a}{c} \frac{Q a}{4} \hat{z}. \quad (43)$$

En este problema los discos giran a velocidades angulares opuestas, pero también tienen cargas de signos opuestos, de manera que el momento magnético total es

$$\mathbf{M} = 2\mathbf{m} = \frac{\omega a Q a}{c} \frac{Q a}{2} \hat{z}. \quad (44)$$

Por otro lado, el campo de radiación asociado al término dipolar magnético es

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c^2 r} \hat{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{M}}(t - r/c) = -\frac{Q a^2}{2c^3 r} \ddot{\omega}(t - r/c) \sin \theta \hat{\phi}. \quad (45)$$

La dependencia temporal del momento magnético viene a través de la ecuación de la variación de ω ,

$$I\dot{\omega}(t) = \tau(t) = \begin{cases} \tau_0 \sin^2\left(\frac{\pi t}{T}\right), & \text{si } 0 \leq t \leq T, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (46)$$

No es necesario encontrar $\omega(t)$, porque lo que nos interesa es $\ddot{\omega}(t)$. De todas maneras, no cuesta mucho ver que

$$\omega(t) = \frac{\tau_0}{2I} \left[t - \frac{T}{2\pi} \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \right]. \quad (47)$$

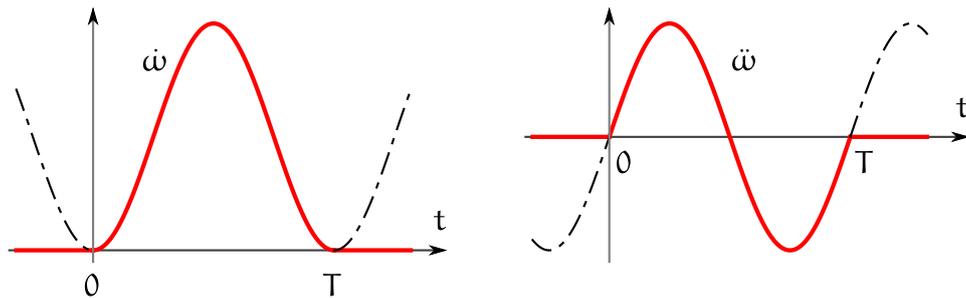
La velocidad angular final es

$$\omega_f = \frac{\tau_0 T}{2I}. \quad (48)$$

Volviendo a los campos de radiación, notar, aunque no es fundamental, que la función $\tau(t)$ empalma suavemente en los límites del intervalo $[0, T]$. Para obtener $\ddot{\omega}$, derivamos la Ec. (46):

$$\ddot{\omega}(t) = \begin{cases} \frac{\pi \tau_0}{T I} \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) = \frac{2\pi \omega_f}{T^2} \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right), & \text{si } 0 \leq t \leq T, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (49)$$

La siguiente figura muestra los gráficos de las funciones $\dot{\omega}$ y $\ddot{\omega}$.



Es evidente que fijado un punto de observación a una distancia r del origen, el campo de radiación sólo puede ser distinto de cero en el intervalo $r/c \leq t \leq T + r/c$. Desde la distancia r , se ve que los discos comienzan a moverse a tiempo $t_1 = r/c$, y se ve que dejan de acelerarse angularmente en $t_2 = r/c + T$. Podemos definir una función ventana $\Theta(a \leq t \leq b)$ que sea 1 entre a y b , y 0 en otro caso. Luego, el campo de radiación es

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \left\{ -\frac{a}{r} \pi \left(\frac{Q}{a^2} \right) \left(\frac{a/T}{c} \right)^2 \left(\frac{\omega_f a}{c} \right) \sin \left[\frac{2\pi(t - r/c)}{T} \right] \sin \theta \hat{\phi} \right\} \Theta \left(\frac{r}{c} \leq t \leq \frac{r}{c} + T \right) \\ &= -\frac{a}{r} E_0 \sin \left[\frac{2\pi(t - r/c)}{T} \right] \Theta \left(\frac{r}{c} \leq t \leq \frac{r}{c} + T \right) \sin \theta \hat{\phi}, \end{aligned} \quad (50)$$

donde

$$E_0 = \pi \left(\frac{Q}{a^2} \right) \left(\frac{a/T}{c} \right)^2 \left(\frac{\omega_f a}{c} \right). \quad (51)$$

La lógica en la agrupación de factores es hacer evidente las unidades. Notar la intervención de $\omega_f a/c$ y de $(a/T)/c$ a modo de factores relativistas β . Por último, el campo magnético de radiación es

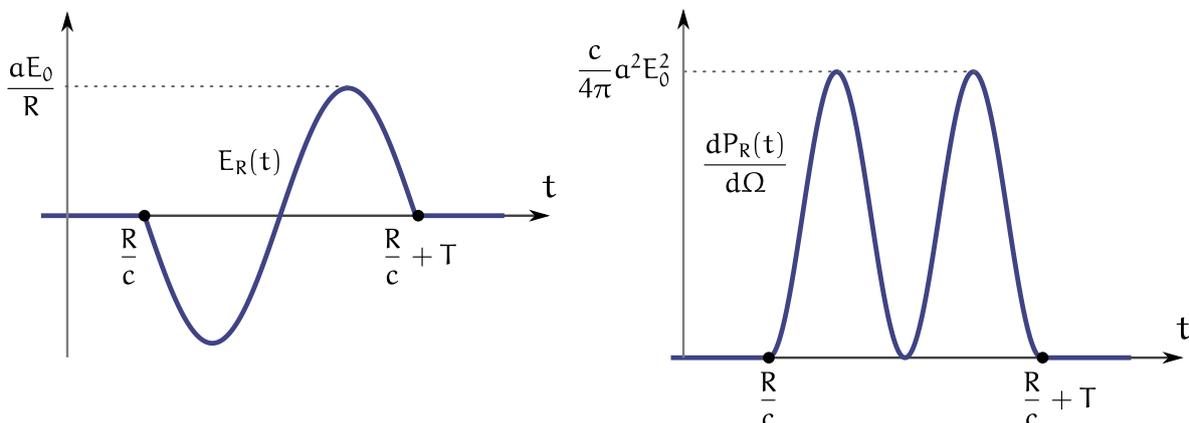
$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{a}{r} E_0 \sin \left[\frac{2\pi(t - r/c)}{T} \right] \Theta \left(\frac{r}{c} \leq t \leq \frac{r}{c} + T \right) \sin \theta \hat{\theta}. \quad (52)$$

b) Para $\mathbf{r} = R\hat{\mathbf{x}}$, obtenemos

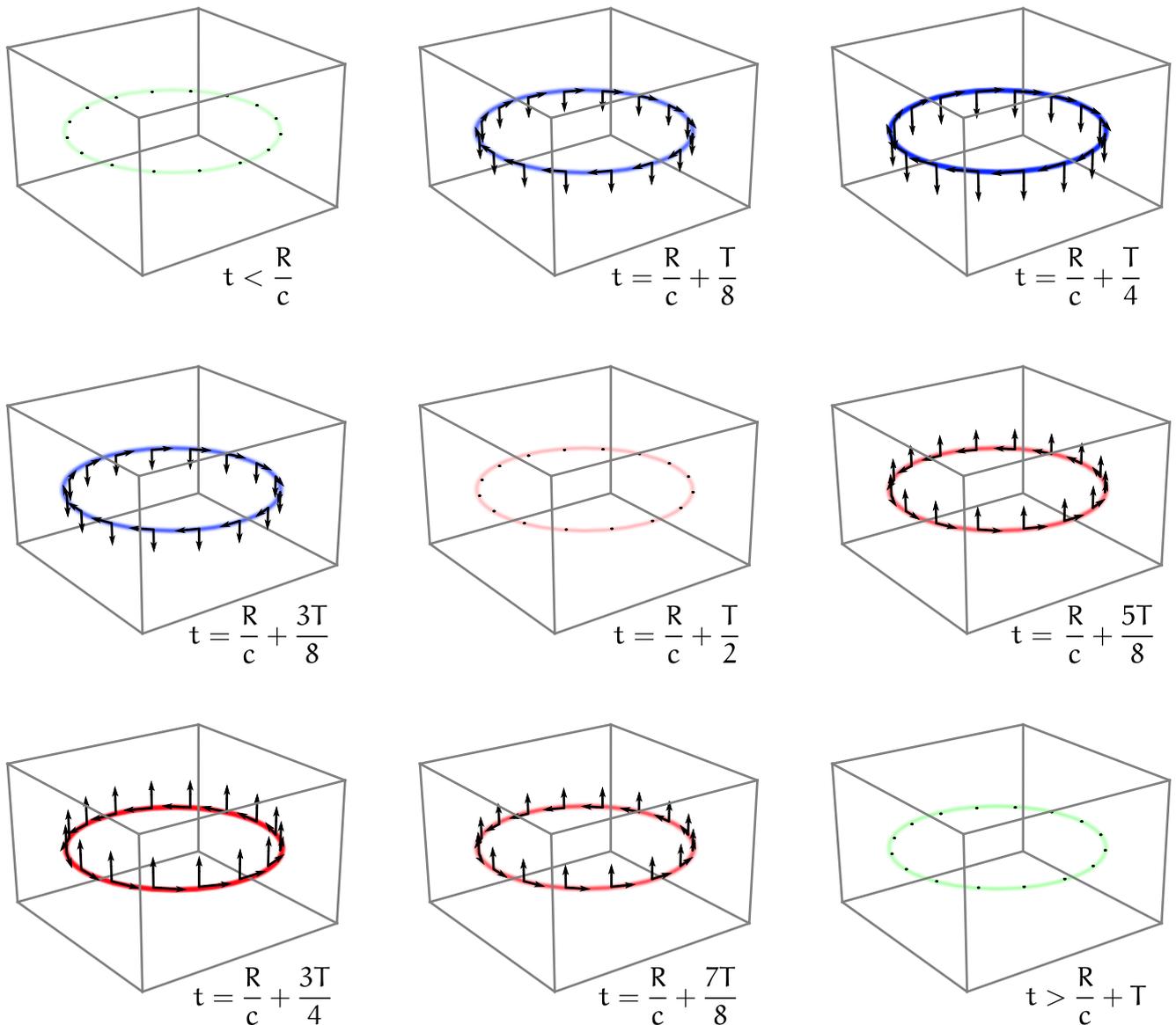
$$\mathbf{E}_R(t) = -\frac{a}{R} E_0 \sin \left[\frac{2\pi(t - R/c)}{T} \right] \Theta \left(\frac{R}{c} \leq t \leq \frac{R}{c} + T \right) \hat{\mathbf{y}}. \quad (53)$$

La intensidad es

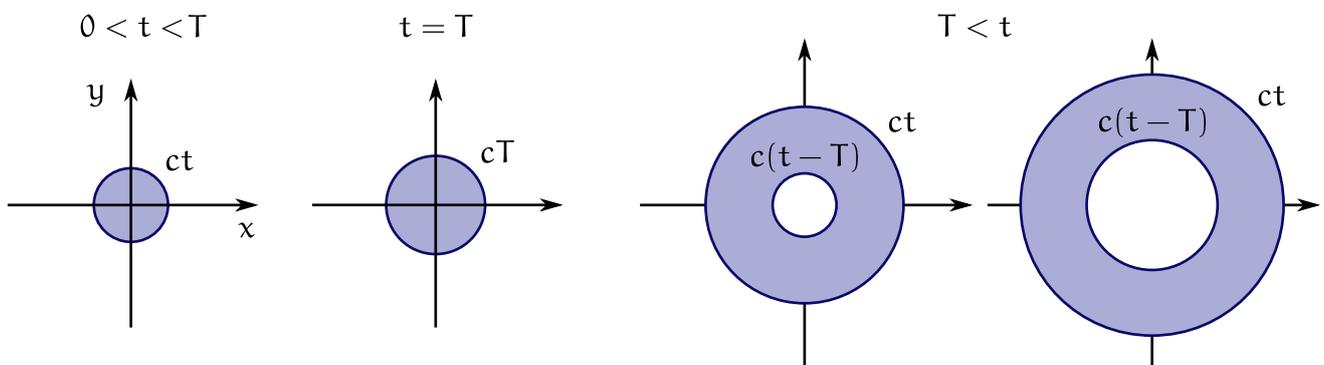
$$\frac{dP_R(t)}{d\Omega} = \frac{c}{4\pi} R^2 |\mathbf{E}_R(t)|^2 = \frac{c}{4\pi} a^2 E_0^2 \sin^2 \left[\frac{2\pi(t - R/c)}{T} \right] \Theta \left(\frac{R}{c} \leq t \leq \frac{R}{c} + T \right). \quad (54)$$



c) Campo eléctrico en la dirección $\hat{\phi}$, campo magnético en la dirección \hat{z} .



d) Sobre el plano xy para $0 < t$, la región en la que el campo de radiación es distinto de cero es, para $t < T$, el disco de radio ct , y para $T < t$, el anillo de ancho cT definido por $c(t - T) < r < ct$.



e) La potencia emitida por el término dipolar magnético es

$$P(t) = \frac{2}{3c^3} |\ddot{\mathbf{M}}(t)|^2. \quad (55)$$

La energía total emitida es la integral de esta cantidad para todo t . En nuestro caso es

$$P(t) = \frac{2c}{3} a^2 E_0^2 \sin^2\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \Theta(0 \leq t \leq T), \quad (56)$$

$$\mathcal{E} = \frac{1}{3} \frac{c}{a/T} (a^3 E_0^2) = \frac{\pi^2}{3} \left(\frac{Q^2}{a}\right) \left(\frac{a/T}{c}\right)^3 \left(\frac{\omega_f a}{c}\right)^2. \quad (57)$$

Factorizada de esta manera, es evidente que la energía tiene las dimensiones correctas.

■ **Problema 4.** Decidir si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa. Justificar.

- Una esfera de radio R , con carga total Q distribuida uniformemente en volumen, se encuentra fija con su centro a una distancia $d > R$ de un plano infinito conductor conectado a tierra. La fuerza entre la esfera y el plano es entonces igual a la fuerza de Coulomb entre dos cargas de valor Q y signos opuestos, que se encuentran separadas por una distancia $2d$.
- En el problema usual de ondas planas y dos medios separados por una superficie plana, es imposible encontrar una solución no trivial que involucre únicamente dos ondas, una en cada medio.
- En un sistema de referencia inercial S , el campo eléctrico forma un ángulo $\theta = \frac{\pi}{3}$ con el campo magnético y se tiene $|\mathbf{B}| = 2|\mathbf{E}|$. Entonces, es posible hallar otro sistema inercial S' donde el campo magnético sea paralelo al eléctrico y resulte $|\mathbf{B}'| = 3|\mathbf{E}'|$, con $|\mathbf{E}'| = |\mathbf{E}|/\sqrt{3}$.

■ **Solución:** a) La afirmación es cierta. La fuerza sobre la esfera puede calcularse como la integral del tensor de Maxwell sobre una superficie arbitraria que la contenga total y exclusivamente. Como el tensor de Maxwell es función del campo eléctrico total, y el campo eléctrico total es el mismo que el que produciría una carga puntual frente de un plano a tierra, entonces la fuerza sobre la esfera es la misma que sobre esa carga puntual ficticia.

b) La afirmación es falsa. Para polarización TM e incidencia con el ángulo de Brewster se tienen sólo dos ondas, una incidente y otra transmitida. No hay onda reflejada, ni siquiera de carácter evanescente.

c) Sería muy sencillo falsear este enunciado si los invariantes en S y en S' tomaran valores diferentes. En S tenemos

$$E^2 - B^2 = -3E^2, \quad (58)$$

mientras que en el sistema S' , si los campos tomaran los valores propuestos, sería

$$E'^2 - B'^2 = -8E'^2 = -\frac{8}{3}E^2. \quad (59)$$

No hay nada más que agregar. La afirmación es falsa.