Campos en regiones sin fuentes libres

1. a) Escriba las ecuaciones constitutivas más generales de un medio lineal en la representación de Boys–Post. Discuta la relación entre la no–localidad (espacial y temporal) del medio y la "localización" de los tensores $\check{\varepsilon}_{\rm EB}(\vec{x}', t')$, $\check{\xi}_{\rm EB}(\vec{x}', t')$, $\check{\zeta}_{\rm EB}(\vec{x}', t')$ y $\check{\nu}_{\rm EB}(\vec{x}', t')$ cerca de $\vec{x}' = 0$ y $t' = 0$.
b) Escriba las ecuaciones constitutivas más generales de un medio lineal isótropo y espacialmente local en la representación de Tellegen. Demuestre que cuando se pasa al dominio frecuencial, estas ecuaciones pueden escribirse como $\vec{D} = \epsilon(\vec{E} + \beta\,\vec{\nabla}\times\vec{E})$ y $\vec{B} = \mu(\vec{H} + \beta\,\vec{\nabla}\times\vec{H})$.

2. La conductividad superficial de una hoja de grafeno se puede controlar mediante un voltaje externo. Este voltaje permite cambiar el potencial químico μ_c del grafeno entre 0 (voltaje externo nulo) y un valor del orden de 1 eV (el potencial químico es un concepto termodinámico que da idea del cambio de energía del sistema cuando se introduce una partícula adicional, manteniendo la entropía y el volumen constantes). Para bajas frecuencias, $\hbar\omega < 2\mu_c$ (típicamente la zona correspondiente al rango de los THz y el infrarrojo lejano), y para temperaturas T no muy altas $\mu_c \gg k_B T$, el grafeno es muy buen conductor y su conductividad superficial se puede aproximar por una expresión tipo Drude que da cuenta de las contribuciones intrabanda (ver figura en `http://bit.ly/2wJsnHF`)

$$\sigma(\omega) \approx \frac{i\,e^2\,|\mu_c|}{\pi\hbar^2(\omega + i\gamma_c)}\,,$$

con e la carga elemental, $\hbar = h/2\pi$ la constante de Planck reducida, k_B la constante de Boltzmann y γ_c la frecuencia de colisiones de los portadores (idealmente nula, un valor realista es $\hbar\gamma_c \approx 0{,}1$ meV).

   a) calcule $\sigma(\omega)$ (valor complejo) en unidades de $e^2/\hbar$ a la frecuencia de 1 THz, $T = 300$ K y $\mu_c = 0{,}2$ eV. Exprese $\sigma(\omega)$ en unidades cgs gaussianas y MKS.

   b) esquematice en el mismo gráfico la variación temporal de la corriente superficial y la variación temporal de la componente tangencial del campo eléctrico en la hoja de grafeno.

   c) encuentre una expresión para el promedio temporal de la potencia por unidad de área que los campos entregan a los portadores de carga.

3. Un campo eléctrico $\vec{E}(\vec{x})\,e^{-i\omega t}$ induce un momento dipolar en un átomo muy pesado situado en el origen. Si el campo incidente no es muy intenso, el movimiento del electrón se puede modelar como una oscilación forzada alrededor de su posición de equilibrio y el desplazamiento r medido desde el núcleo obedece la ecuación

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} + \gamma\,\frac{d\mathbf{r}}{dt} + \omega_0^2\,\mathbf{r} = -\frac{e}{m}\,\mathbf{E}$$

a) Obtener la contribución de este electrón al momento dipolar inducido en el átomo y la susceptibilidad eléctrica del átómo.

b) Si el medio sometido a la acción de un campo eléctrico consiste de N moléculas idénticas con Z electrones por molécula y si en vez de un único electrón con ω_0 y γ como en el punto anterior ahora hay f_j electrones por molécula con ω_j y γ_j, $\sum_j f_j = Z$, demostrar que la polarización inducida en el medio por unidad de volumen es

$$\vec{P} = N\frac{e^2}{m}\sum_j \frac{f_j\vec{E}}{\omega_j^2 - \omega^2 - i\nu_j\omega} = \chi\vec{E}\ ,$$

donde χ es la susceptibilidad eléctrica. A partir de este resultado, encontrar una expresión para la "constante" dieléctrica $\epsilon(\omega)$ (permitividad eléctrica).

c) usar los resultados para investigar las zonas de dispersión anómala, absorción resonante y casos límites de bajas y altas frecuencias (ver, por ejemplo, sección 7.5 del libro de Jackson)

d) hacer un script Python y elegir parámetros adecuados para reproducir cualitativamente la Figura 7.8 del libro de Jackson, 3ra ed.

4. Una onda plana monocromática se propaga en un dieléctrico lineal, isótrópo, homogéneo y aquiral caracterizado por parámetros constitutivos $\varepsilon(\omega) = \varepsilon_r(\omega) + i\,\varepsilon_i(\omega)$ y $\mu(\omega) = \mu_r(\omega) + i\,\mu_i(\omega)$.

   a) Hallar expresiones para los campos, sus periodicidades y decaimientos espaciales asociados.

   b) suponiendo que la onda es linealmente polarizada, hacer un esquema con la orientación relativa de los campos, la dirección de la velocidad de fase y la dirección del flujo medio de potencia.

   c) calcular la densidad de corriente equivalente de polarización $\mathbf{J}_p$.

   d) Ilustrar el balance energético en una región determinada.

5. a) Considere el dieléctrico lineal del problema anterior pero en el caso "ideal" no disipativo $\varepsilon_i = \mu_i = 0$. Caracterizar la propagación de la onda en los cuatro cuadrantes del plano $\varepsilon_r - \mu_r$ (ver figura adicional en `http://bit.ly/2wJv5Np`). ¿Cómo definiría el índice de refracción en los cuadrantes I y III? ¿Y en los cuadrantes II y IV?
   b) En el caso disipativo $\varepsilon_i > 0$, $\mu_i > 0$, ¿cuál es la condición para que el flujo medio de potencia esté orientado en dirección contraria a la dirección de propagación de la onda?

6. Considere un medio inhomogéneo, lineal, no magnético y aquiral, caracterizado por la permitividad eléctrica $\varepsilon(\omega, \vec{r}) = \varepsilon_r(\omega, \vec{r}) + i\,\varepsilon_i(\omega, \vec{r})$, con $|\varepsilon_r| \gg \varepsilon_i$.

a) Demostrar que la transformada de Fourier del campo eléctrico a la frecuencia ω satisface la ecuación

$$\nabla^2 \mathbf{E}_\omega + k^2\, \mathbf{E}_\omega = -\nabla\Big(\mathbf{E}_\omega \cdot \frac{\nabla\varepsilon}{\varepsilon}\Big)$$

con $k = \sqrt{\varepsilon}\,\omega/c$.

b) Suponga ahora que el cambio espacial de ε en distancias del orden de la longitud de onda es pequeño, de manera que $|\nabla\varepsilon|\lambda \ll 1$. Demostrar que el miembro derecho de la ecuación anterior puede despreciarse y que la distribución espacial de los campos está determinada aproximadamente por la ecuación de Helmholtz homogénea $\nabla^2\,\psi_\omega + k^2\psi_\omega = 0$, donde ψ_ω es una componente cartesiana de $\mathbf{E}_\omega$ o de $\mathbf{H}_\omega$.

c) Si se expresa $\psi_\omega(\vec{r})$ como producto de una "amplitud" y un factor de "fase", en la forma $\psi_\omega(\vec{r}) = \psi^0_\omega\, e^{i\omega S/c}$, demostrar que $S(\vec{r})$ está determinada por la ecuación

$$(\nabla S)^2 + \frac{c}{i\omega}\,\nabla^2 S = \varepsilon.$$

Tanto ψ^0_ω como S son funciones de la posición lentamente variables, Notar que $S(\vec{r})$ es en general compleja, aunque ε sea real.

7. Los resultados del problema anterior permiten conectar la descripción electromagnética rigurosa con la descripción de la óptica geométrica, válida siempre que las distancias características del medio sean mucho menores que λ.
a) Observe que para k muy grande, $(\nabla S)^2 = \varepsilon = n^2$, n el índice de refracción, y que $\nabla \log\psi^0_\omega \cdot \nabla S = -\frac{1}{2}\nabla^2\, S$.
b) Observe que S es real cuando n es real. En estos casos, S es la fase de la onda $\psi^0_\omega\, e^{i\omega S/c}$, los frentes de onda son las superficies S=constante y los rayos (las normales a los frentes de onda), son ∇S en cada punto. Entonces, si se define el vector $\vec{n}$ con módulo n y dirección igual a la del rayo, resulta que $\nabla S = \vec{n}$.
C) Como el gradiente de S está en la dirección del rayo, entonces la integral de camino $S = \int \vec{n}\cdot \mathrm{d}\vec{\ell}$ a lo largo de un rayo siempre es menor que la integral por otros caminos posibles, que es el enunciado del principio de Fermat para medios ilimitados y variaciones lentas del índice de refracción.

8. *(Rotación de Faraday)* Considere un "plasma tenue" formado por cargas eléctricas libres, de masa m y carga e, con n cargas por unidad de volumen. Se supone que la densidad es uniforme y que pueden despreciarse las interacciones entre las cargas. Los resultados del problema 2 dan la conductividad σ en función de ω.

a) Hallar la relación de dispersión $k(\omega)$ para los modos propagantes en este medio.

b) Calcular el índice de refracción en función de ω. ¿Qué sucede si $\omega < \omega_p$, donde ω_p es la frecuencia de plasma, definida por $\omega_p^2 \equiv 4\pi n e^2/m$?

c) Suponga ahora que el plasma está sometido a la acción de un campo magnético externo $\mathbf{B}_{\text{ext}}$. Demuestre que la relación de dispersión $k(\omega)$ para los modos propagantes (ondas planas) en dirección paralela a $\mathbf{B}_{\text{ext}}$ tiene dos ramas asociadas a estados de polarización circulares con sentidos opuestos. Encontrar la velocidad de fase y el índice de refracción para cada rama. Considere que el campo magnético de la onda plana es despreciable frente a $\mathbf{B}_{\text{ext}}$. ¿Puede justificar esta suposición?

d) Una onda plana linealmente polarizada que incide desde aire cruza el plasma en dirección paralela al campo magnético $\mathbf{B}_{\text{ext}}$. Muestre que al salir de la región con plasma, el plano de polarización de la onda ha rotado un ángulo proporcional a la distancia de plasma recorrida. Calcular la constante de proporcionalidad.

9. Un medio quiral es un medio isótropo que tiene asociado un sentido de giro impuesto por su estructura microscópica. Sus ecuaciones constitutivas en el dominio temporal y en la representación de Tellegen (representación $\mathbf{EH}$) son

$$\vec{D} = \epsilon(\vec{E} + \beta\,\vec{\nabla} \times \vec{E})$$
$$\vec{B} = \mu(\vec{H} + \beta\,\vec{\nabla} \times \vec{H}),$$

(ecuaciones de Drude-Born-Fedorov) donde ϵ, μ y β (la quiralidad) son funciones de ω) ($\beta = 0$ es el dieléctrico aquiral).

a) desacople las ecuaciones de Maxwell y demuestre que todos los campos $\vec{E}$, $\vec{B}$, $\vec{H}$ y $\vec{D}$ satisfacen la misma ecuación de onda

$$\nabla^2\vec{E} + 2\,\beta\,\gamma^2\,\vec{\nabla} \times \vec{E} + \gamma^2\vec{E} = 0\ ,$$

donde $\gamma^2 = k_a^2/\,(1 - k_a^2\,\beta^2)$, $k_a = \frac{\omega}{c}\sqrt{\epsilon\mu}$.

b) proyectando $\vec{E}$ en la base de ondas planas $\{e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}\}$ demuestre que cada elemento de la base satisface la siguiente ecuación vectorial

$$-k^2\vec{E} + 2i\beta\gamma^2\vec{k} \times \vec{E} + \gamma^2\vec{E} = 0\ .$$

Notar que cuando antes consideramos ondas planas en distintos medios, en realidad lo hacíamos para no hablar de bases ni proyecciones, pero en realidad es lo mismo. Ahora tenemos que encontrar las propiedades de estos elementos de la base, que serían los modos propagantes del medio quiral.

c) Verifique que los campos de la base son transversales y proyecte las direcciones de los campos en dos direcciones ortogonales del plano transversal. Obtendrá una ecuación de autovalores para la ecuación de dispersión, cuyos autovectores serán los elementos de la base.

d) muestre que la la relación de dispersión tiene dos ramas y que los modos de propagación en el medio quiral están circularmente polarizados en sentidos contrarios. Encuentre la velocidad de fase y el índice de refracción para cada modo.

e) encuentre el flujo de potencia asociado a cada modo y observe que bajo ciertas circunstancias puede haber flujo de pontencia en dirección opuesta a la dirección de propagación.

f) para saber más, ver "Negative refraction and backward wave in chiral mediums: Illustrations of Gaussian beams", *J. Appl. Phys.* 113, 153504 (2013), copia en `http://bit.ly/2uqeVvE`.

10. Para una onda plana que se propaga en un medio conductor lineal, isótropo y homogéneo, encuentre la relación entre las contribuciones de los campos eléctrico y magnético a la densidad de energía. Halle las expresiones límite para: a) Un mal conductor (¿dieléctrico con pérdidas?). b) Un buen conductor.

11. Deducir la expresión para la longitud de atenuación de una onda electromagnética plana que se propaga en un medio conductor, en los casos límites de buen y mal conductor. Calcule la longitud de atenuación en cobre para una frecuencia de 60 Hz ($\sigma \approx 5 \times 10^{17}$ s^{-1}), y para ondas de radio de 100 kHz en agua de mar ($\sigma \approx 5 \times 10^{10}$ s^{-1}).

12. Escriba las ecuaciones de Maxwell en el dominio frecuencial para los campos en un cristal lineal, no magético, eléctricamente anisótropo y completamente transparente caracterizado por permeabilidad $\mu = 1$ y permitividad $\tilde{\epsilon}$ (tensor real simétrico con tres autovalores reales y positivos distintos).

    a) Para una onda plana que se propaga en el cristal, haga un esquema con las orientaciones relativas de $\vec{E}$, $\vec{H}$, $\vec{D}$, $\vec{B}$, $\vec{k}$ y la dirección del flujo promedio de potencia.

    b) Proyectando los campos en la base de ondas planas, procedimiento que equivale a seguir considerando solamente una onda plana monocromática con vector de onda $\vec{k}$, desacople las ecuaciones de Maxwell y obtenga un sistema homogéneo para las componentes del campo eléctrico. Fije la dirección de propagación con respecto a los ejes propios del cristal.

    c) Fijada la dirección de propagación con respecto a los ejes propios del cristal, halle la ecuación de dispersión $k(\omega)$. Demuestre que dicha ecuación dees bicuadrática y que entonces habrá en general dos soluciones para $k^2 = k^2(\omega)$, cada una en una superficie cerrada en el espacio de vectores de onda. Verifique que si los tres autovalores de $\tilde{\epsilon}$ son iguales (medio isótropo), las dos superficies colapsan en una única esfera.

13. En el problema anterior, considere el caso en que $\tilde{\epsilon}$ tiene dos autovalores iguales (cristal uniaxial). Cuando el autovalor distinto es mayor (menor) que los autovalores iguales, se dice que el cristal es *positivo* (*negativo*).

a) Demuestre que la ecuación de dispersión se factoriza en dos ecuaciones cuadráticas, una que corresponde a una esfera en el espacio $\vec{k}$ (modos ordinarios) y otra que corresponde a un elipsoide de revolución (modos extraordinarios). Demuestre que ambas superficies se tocan a lo largo de una dirección, llamada eje óptico y dada por el autovector que corresponde al autovalor distinto del tensor $\tilde{\epsilon}$.

b) ¿Cuánto vale el índice de refracción de los modos ordinarios? ¿Y el de los modos extraordinarios?

c) Una vez fijada la dirección de propagación, ¿cuál es la polarización que corresponde a ambos modos? ¿Es el vector de Poynting de cada modo paralelo al vector de ondas? Discuta.

14. Mediante el análisis de Fourier de sus dependencias espaciales y temporales, observe que cualquier magnitud $F(\vec{x},t)$ admite la siguiente representación en la base de ondas planas

$$F(\vec{x},t) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\vec{k},\omega)\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}\, d^3k\, d\omega\,,$$

donde $\vec{k} = (k_x, k_y, k_z)$ y ω son variables de Fourier conjugadas a $\vec{x}$ y t. Luego, debe admitirse que

$$\vec{E}(\vec{x},t) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \vec{A}(\vec{k},\omega)\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}\, d^3k\, d\omega\,.$$

es una representación matemáticamente válida para el campo eléctrico.
a) demuestre que en un medio lineal, isótropo y homogéneo sin fuentes, $\vec{A}(k_x,k_y,k_z,\omega) = \vec{A}(k_x,k_z,\omega)\delta[k_x^2+k_y^2+k_z^2-\frac{\omega^2}{c^2}\epsilon\mu]$ y que $\vec{k}\cdot\vec{A}=0$. En la notación $\vec{A}(k_x,k_z,\omega)$ está implícita la elección de k_y como variable dependiente. Discuta la elección de otra componente de $\vec{k}$ como dependiente y la elección de su signo.
b) ¿ Cómo es la distribución espectral $\vec{A}(k_x,k_z,\omega)$ en el caso límite (idealización) de onda plana monocromática (no localizada ni espacial ni temporalmente)?
c) Sintetice un tren de ondas que se propaga en la dirección del versor $\hat{k}_0$, no localizado en la dirección perpendicular a $\hat{k}_0$ y espacio–temporalmente localizado en la dirección $\hat{k}_0$.
d) Sintetice un haz monocromático (es decir, no localizado temporalmente) que se propaga en la dirección del versor $\hat{k}_0$ y que está localizado en la dirección perpendicular a $\hat{k}_0$. Relacione la distribución espectral $\vec{A}$ con la distribución espacial del campo en la dirección transversal.
e) En el haz proveniente de un láser la intensidad es mayor en el centro que en sus bordes (ver `http://bit.ly/2vXlGVT`). En la mayoría de los láseres la distribución espacial de intensidad es gaussiana. Usando los resultados previos, encuentre la forma de la función espectral $\vec{A}(\vec{k},\omega)$ para este tipo de láseres.