Problemas de frontera en regiones sin fuentes libres

Los problemas de la guía 1 ilustraban en distintos escenarios el siguiente principio básico: la forma general de los campos en ausencia de fuentes libres y contornos queda determinada por las ecuaciones de Maxwell y las propiedades constitutivas. En las guías 2 y 3 se agrega el ingrediente de los contornos y los problemas pretenden ilustrar los siguientes aspectos: i) cómo la geometría de los contornos condiciona las soluciones generales; ii) el poder del método de separación de variables; iii) la simplicidad conceptual que se obtiene al considerar las soluciones como elementos de un espacio de Hilbert y la importancia de elegir una base adecuada; iv) visualizar la dinámica de modos estacionarios y modos propios en contornos abiertos y cerrados; v) algunas aplicaciones de los balances de cantidades mecánicas.

1. Una onda plana monocromática incide normalmente desde el vacío sobre la superficie de un medio material.
   a) Determinar la presión de radiación p_{rad} en el caso en que el medio es perfectamente conductor. Verificar que p_{rad} es igual a la densidad de energía de la onda.
   b) Mostrar que p_{rad} y la densidad de energía son también iguales en el caso en que la superficie es totalmente absorbente.
   c) ¿Qué radio debe tener una esfera hecha de un material con densidad 1 g cm^{-3}, que absorbe toda la luz que le llega, para que la presión de radiación de la luz solar compense la atracción gravitatoria del Sol? Aproximar la potencia de la radiación solar por $P = 4 \times 10^{26}$ W.

2. Considere una superficie con simetría de traslación a lo largo de una dirección fija en el espacio (dirección $\hat{z}$) y que separa dos medios homogéneos caracterizados por parámetros constitutivos ε_j, μ_j, $j = 1, 2$. Las superficies con esta característica se pueden describir mediante la ecuación de una curva en el plano $x - y$ e incluyen superficies planas ($y = \text{cte}$), cilindros de sección circular ($x^2 + y^2 = R^2$), cilindros de sección no circular, chapas de techo, etc. El objetivo del problema es estudiar la forma más general que pueden tener los campos cuando los contornos tienen la simetría de translación especificada. Para facilitar el tratamiento de los medios, se hace un análisis de Fourier de la dependencia temporal de los campos a ambos lados de la superficie.
   a) Asegúrese que la parte espacial de todos los vectores campo satisfacen la misma ecuación de Helmholtz en cada zona.
   b) Use el método de separación de variables para demostrar que la dependencia espacial de cualquier componente cartesiana de los campos a la frecuencia ω es combinación de funciones de la forma $\psi_{\omega k_z}(x, y, z) = \psi_{\omega k_z}(x, y)\, e^{ik_z z}$, con k_z una constante de separación, por el momento arbitraria (y que esperamos que sea determinada por la física de cada problema).
   c) Demuestre que debido a la simetría de traslación a lo largo de $\hat{z}$, las funciones $\psi^j_{\omega k_z}(x, y, z)$ en cada región, $j = 1, 2$, deben satisfacer por sí mismas las condiciones de contorno en la superficie, ambas con el mismo valor de k_z y que esta afirmación equivale a decir que las condiciones de contorno no mezclan ni componentes con distinta ω ni con distinto k_z;

d) Demuestre que las funciones $\psi^j_{\omega k_z}(x,y,z)$ en cada región satisfacen ecuaciones de Helmholtz bidimensionales $[\nabla_t^2+\gamma_j^2]\ \psi^j_{\omega k_z}=0$, con $\nabla^2=\nabla_t^2+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$, $\gamma_j^2=\frac{\omega^2}{c^2}\epsilon_j\mu_j-k_z^2$;
e) Proyecte la parte espacial de los vectores campos a la frecuencia ω en dos componentes, una paralela y otra transversal a $\hat{z}$, $\vec{E}=\vec{E}_t+E_z\hat{z}$, $\vec{H}=\vec{H}_t+H_z\hat{z}$, todas funciones de $\vec{x}=(x,y,z)$. Demuestre que para cada componente de Fourier a la frecuencia ω los campos transversales en cada zona satisfacen

$$\vec{E}_t^j=\frac{1}{\gamma_j^2}\Big[\vec{\nabla}_t\frac{\partial E_z^j}{\partial z}-i\mu_j\frac{\omega}{c}\hat{z}\times\vec{\nabla}_tH_z^j\Big]\quad \text{y}\quad \vec{H}_t^j=\frac{1}{\gamma_j^2}\Big[\vec{\nabla}_t\frac{\partial H_z^j}{\partial z}+i\epsilon_j\frac{\omega}{c}\hat{z}\times\vec{\nabla}_tE_z^j\Big],$$

es decir, que si se conocen los campos longitudinales, entonces también se conocen los transversales. *Comentario: bajo la hipótesis de simetría de traslación, el método de separación de variables conduce a escribir la solución más general como sumas o integrales sobre todos los valores de la constante de separación k_z permitidos por la física de cada problema particular.*

3. En el problema anterior, uno de los medios es un conductor perfecto.
a) Justifique el uso de $\hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{E}_{\omega k_z}=0$ y $\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{B}_{\omega k_z}=0$ como condiciones de contorno sobre la superficie.
b) Usando los resultados del problema anterior, demuestre que las condiciones desacopladas

$$(E_z)_{\omega k_z}\Big|_c=0\quad ,\quad \frac{\partial(B_z)_{\omega k_z}}{\partial n}\Big|_c=0$$

son condiciones necesarias y suficientes para el cumplimiento de las condiciones del punto a). *Comentario: bajo la hipótesis de simetría de traslación y contornos perfectamente conductores, el problema de hallar todos los vectores campo se reduce a encontrar dos funciones escalares* ***desacopladas****.*
c) Las dos funciones escalares desacopladas $(E_z)_{\omega k_z}$ y $(H_z)_{\omega k_z}$ actúan como potenciales que simplifican el tratamiento vectorial y dan origen a la clasificación de modos TE ($(E_z)_{\omega k_z}\equiv 0$ en todo punto del espacio) y modos TM ($(H_z)_{\omega k_z}\equiv 0$ en todo punto del espacio). A la luz de las expresiones obtenidas en el punto e) del problema 2, estudie la posible existencia de un tercer tipo de modos llamados TEM en los que tanto $(E_z)_{\omega k_z}$ como $(H_z)_{\omega k_z}$ son cero en todo punto del espacio. d) determine las cargas y corrientes inducidas en el conductor perfecto.
e) determine el promedio temporal de potencia absorbida en la superficie del conductor perfecto.

4. Volviendo al problema 2 (ningún medio es conductor perfecto, CP), escriba las condiciones de frontera en términos de las componentes $(E_z)_{\omega k_z}$ y $(H_z)_{\omega k_z}$ exclusivamente. *Comentario: Para CP hay dos condiciones de frontera escalares (una por modo) y para medios penetrables hay cuatro. Discuta.*

5. Si bien en la naturaleza y para algunos rangos de frecuencia existen excelentes conductores, no son perfectos. En este caso el tratamiento teórico exacto se complica, pues para conductividad finita ya no es válido suponer campos nulos en el interior del conductor. En los buenos conductores es conveniente usar un esquema iterativo que corrije de manera autoconsistente la solución de conductor perfecto y muestra cómo la conductividad finita afecta los resultados.
a) demuestre que los conductores reales inevitablemente absorben potencia de los campos externos.
b) Demuestre las ecuaciones (8.9) y (8.10) de J3 (Jackson 3ed, MKS) para los campos en el interior de un buen conductor. Use estos resultados para corregir los campos exteriores al conductor obtenidos con la idealización de conductor perfecto. Compare con los resultados análogos de las ecs. (59.3) y (59.5) de LLP8 (Landau L&P, cgs). ¿Son equivalentes?
c) En base a los resultados anteriores discuta las Figs. 8.1 y 8.2 de J3.
d) Demuestre la expresión 8.12 de J3 para el promedio temporal de la potencia absorbida por unidad de area en la superficie de un buen conductor y la expresión (59.9) de LLP8 para el promedio temporal de la potencia total absorbida.
f) Interprete las pérdidas óhmicas en el conductor en términos de corrientes superficiales equivalentes, ver ecuaciones 8.13-8.15 de J3;
g) El coeficiente de proporcionalidad entre las pérdidas óhmicas y la amplitud al al cuadrado de las corrientes superficiales equivalentes en 8.15 de J3 juega el paper de una "resistencia superficial". En la misma línea, LLP8 llama "impedancia superficial" al escalar complejo que relaciona la (pequeña) componente de campo eléctrico tangencial a la superficie del conductor con la componente tangencial del campo magnético, evaluadas en la superficie. Ver 8.11 de J3 y 59.7 59.8 de LLP8.

6. Considere la región interior de un cilindro metálico de sección rectangular de lados a y b que contiene un material dieléctrico de constantes ϵ y μ. Considere que el metal es perfectamente conductor.
a) Usando los resultados de los problemas 2 y 3, encuentre una base para todos los campos internos. Observe que la base del espacio de soluciones es la unión de dos bases, una del subespacio TE y otra del subespacio TM.
Comentario:para determinar la dirección y la distribución espacial de los campos de la base es necesario hacer una nueva separación de variables en las coordenadas transversales a la dirección de simetría. La geometría indica que deben usarse coordenadas cartesianas.
b) Observe que para algunos elementos de la base el cilindro se comporta de manera dispersiva mientras que para otros elementos de la base se comporta de manera reactiva. ¿Qué condiciones deben cumplir los modos propagantes? Obtenga frecuencias de corte, velocidades de fase y de grupo. ¿Cuáles son los tres modos más bajos? c) Dibuje un mapa de colores (o de niveles de gris) que ponga en evidencia la distribución espacial de los campos para los primeros modos.

d) Calcule la potencia media transmitida por cada modo.

e) Cuando estos caños se usan como guías de onda, a veces es conveniente ajustar las dimensiones para que la frecuencia de trabajo esté entre las dos primeras frecuencias de corte. Así, los únicos campos propagantes están en su modo más bajo. Para una guía comercial, con núcleo de aire y dimensiones 2,28 cm y 1,01 cm, calcule el rango de frecuencias en el cual la guía puede emplearse en el modo más bajo.

f) Analice en detalle el modo TE_{10}. Observe que sólo depende de la presencia de dos paredes. ¿Existen otros modos con esta propiedad? Descomponga los campos de este modo como suma de ondas planas viajeras. Analice la dirección de propagación y la orientación de $\vec{E}$ y $\vec{B}$ para estas ondas.

g) Estudie la atenuación de los distintos modos para una guía rectangular hecha con un metal de conductividad finita. Halle la potencia disipada por unidad de longitud y la constante de atenuación para el modo TE_{10}. Evalúe la distancia de atenuación para el caso de cobre a la frecuencia $\omega = 10$GHz, $\sigma = 5{,}9\,10^7$ mhos/m.

7. Considere la región del espacio delimitada por dos cilindros concéntricos de sección circular (radios interno y externo a y b respectivamente) y paredes perfectamente conductoras.

   a) Observe que la base del espacio de soluciones de las ecuaciones de Maxwell en la región delimitada por ambos cilindros es la unión de tres bases, una del subespacio TE, otra del subespacio TM y otra del subespacio TEM.

   a) Estudie los campos $\vec{E}$ y $\vec{B}$ de las tres bases. ¿Existen modos TEM no propagantes? ¿Los modos TEM son ondas planas?

   Comentario: igual que en el problema anterior, para determinar la dirección y la distribución espacial de los campos electromagnéticos de la base es necesario hacer una nueva separación de variables en las coordenadas transversales a la dirección de simetría (en el problema 2 ya se había hecho separación para la coordenada paralela a a la dirección de simetría). Es claro que la geometría en este caso indica que las coordenadas transversales adecuadas son las cilíndricas.

   b) Dibuje un mapa de colores (o de niveles de gris) que ponga en evidencia la distribución espacial de campos.

   c) Calcule la potencia media transmitida.

   d) En el modo TEM los campos $\vec{E}$ y $\vec{B}$ pueden derivarse de una función escalar o "potencial". Primero trabaje con el potencial para $\vec{E}$ y luego utilice el potencial para $\vec{B}$. Analice la multivaluación de este potencial y relaciónela con la corriente que circula por el conductor interno. Discuta por qué el potencial para $\vec{E}$ no resulta multivaluado.

   e) Estudie la atenuación del modo TEM cuando los cilindros tienen conductividad finita.

8. Considere una cavidad abierta de paredes perfectamente conductoras fabricada con un cilindro de longitud d y sección transversal con forma de sector circular (radio a y ángulo α). Uno de los extremos de esta cavidad está cerrado por un conductor

pefecto plano, perpendicular al eje del cilindro.
a) Encuentre una base para todos los campos en el interior de esta cavidad.
b) Escriba la expresión más general de los campos en términos de la base encontrada en a). Considerando que esta expresión representa un vector del espacio de Hilbert de soluciones permitidas por las ecuaciones de Maxwell + las condiciones de contorno de este problema, explicite las coordenadas del vector solución en la base encontrada en a). ¿Qué condiciones físicas habría que imponer para determinar dichas coordenadas?
c) En en el caso $\alpha = \pi$ (cavidad semicircular) encuentre las coordenadas cuando se especifican las distribuciones espaciales de campos en el extremo libre de la cavidad.
d) Si el extremo libre se cierra con otro conductor pefecto plano, también perpendicular al eje del cilindro, determine las frecuencias de resonancia de la cavidad cuando $\alpha = \pi$. Ordene los modos resonantes de menor a mayor frecuencia. Escriba las distribuciones espaciales y las direcciones de los campos em para los primeros modos. ¿Son sintonizables estos modos?
e) Dibuje un mapa de colores (o de niveles de gris) que ponga en evidencia la distribución espacial de campos.
f) Si las paredes tienen conductividad alta pero finita, las pérdidas en los conductores ensanchan los picos resonantes de la energía en la cavidad, que dejan de ser deltas de Dirac para ser funciones lorentzianas caracterizadas por un factor de mérito Q, como en todo fenómeno resonante. Usando la definición usual de Q (ver por ejemplo 8.86 de J3, Q proporcional al cociente entre energía almacenada en el sistema y energía disipada por ciclo) y los resultados obtenidos en el problema 5 obtenga expresiones para el factor de mérito en el caso $\alpha = \pi$.

9. Considere un cilindro de sección rectangular como el del problema 6 con $a = 3b$ y con una discontinuidad en el material interior: $\epsilon = \mu = 1$ para $z < 0$ y $\epsilon = 4$, $\mu = 1$ para $z > 0$. Desde $z \to -\infty$ se ha logrado excitar un modo propagante y con una frecuencia 1,4 veces mayor que la frecuencia de corte del modo más bajo en la zona $z < 0$.
a) Determine la forma de los campos reflejados y transmitidos y calcule los coeficientes de reflexiíon y transmisión para las amplitudes y para los flujos de potencia.
b) ídem a) pero cuando toda la sección en $z = 0$ está cubierta con un diafragma perfectamente conductor.
c) ídem a) pero cuando $\epsilon = 16$, $\mu = 1$ $(z > 0)$.

10. Una onda plana monocromática con campo eléctrico normal al plano de incidencia ilumina en forma oblicua (ángulo de incidencia θ con la normal) la superficie plana que separa al medio 1 (medio de incidencia) del medio 2. Los dos medios son homogéneos y están caracterizados por parámetros constitutivos ε_j y μ_j, $j = 1, 2$. Suponga que a la frecuencia de trabajo los medios son completamente transparentes, $\operatorname{Im}\varepsilon_j = 0$, $\operatorname{Im}\mu_j = 0$ y que $\operatorname{Re}\varepsilon_j > 0$, $\operatorname{Re}\mu_j > 0$ (medios con velocidad de fase

positiva).
a) Tomando promedio temporal en la ecuación de conservación del impulso lineal y suponiendo que $\varepsilon_1 \mu_1 < \varepsilon_2 \mu_2$, demuestre que la la presión de radiación p_{rad} es $p_{\mathrm{rad}} = \left[\varepsilon_1(E_i^2 + E_r^2)\cos^2\theta_i - \varepsilon_2 E_t^2 \cos^2\theta_t\right]/(8\pi)$ donde θ_i y θ_t son los ángulos de incidencia y de transmisión respectivamente.
b) ídem a), pero cuando $\varepsilon_1 \mu_1 > \varepsilon_2 \mu_2$ y el ángulo de incidencia es mayor que el ángulo crítico de reflexión total.
c) ídem a), pero ahora el medio de transmisión es un medio con velocidad de fase negativa, $\varepsilon_2 < 0$, $\mu_2 < 0$.
d) ídem a), pero ahora el medio de transmisión es un medio con pérdidas, $\mathrm{Im}\,\varepsilon_j > 0$, $\mathrm{Im}\,\mu_j > 0$.

11. Estudiar en el límite cuasiestático las resonancias plasmónicas de una pequeña partícula metálica esférica sometida a la acción de campos oscilantes.
a) Mostrar que el campo interno es homogéneo y que el campo externo inducido es dipolar. Encuentre el dipolo inducido en la esfera en términos del campo inductor.
b) Aceptando las expresiones (9.19) de J3 para el campo lejano (MKS) producido por un dipolo oscilante (a demostrar más adelante), calcule la distribución angular de potencia media temporal emitida por el dipolo inducido por unidad de ángulo sólido.
c) Obtenga la potencia total irradiada por el dipolo inducido. ¿Cuál es la diferencia más notable entre el comportamiento de esferas metálicas y dieléctricas?
d) Buscar información sobre la copa de Licurgo, un cáliz de vidrio actualmente en exhibición en el Museo Británico. Relacionar con los resultados obtenidos en c).

12. Una lámina dieléctrica de espesor d y caracterizada por parámetros constitutivos ε_2, μ_2 separa dos medios semi-infinitos caracterizados por ε_1, μ_1 (medio de incidencia, parámetros reales) y ε_3, μ_3 (medio de trasnsmisión). La lámina es iluminada por una onda plana con dependencia exponencial de la forma $\mathrm{e}^{i\,(\alpha\, x - \beta_1 y)}$ y cuya dirección de incidencia forma un ángulo θ_i con la normal (dirección $\hat{y}$, plano de incidencia $x - y$).
a) usando los resultados obtenidos para contornos con simetría de traslación, divida el problema vectorial en una combinación de dos problemas escalares.
b) Para el caso en que el campo magnético incidente es perpendicular al plano de incidencia, escriba las expresiones completas de los campos en cada zona.
c) plantee las condiciones de contorno en cada frontera.
d) demuestre que las expresiones para el coeficiente de reflexión del campo reflejado hacia el primer medio y el coeficiente de transmisión del campo en el tercer medio son

$$r_1 = \frac{r_{12} + r_{23}\, e^{2i\beta_2 d}}{1 + r_{12}\, r_{23}\, e^{2i\beta_2 d}} \quad , \qquad t_3 = \frac{t_{12}\, t_{23}\, e^{2i(\beta_1 - \beta_2)d}}{1 + r_{12}\, r_{23}\, e^{2i\beta_2 d}}$$

donde r_{ij} y t_{ij} son los coeficientes de Fresnel de reflexión y transmisión para una sola interfase

$$r_{ij} = \frac{\beta_i/\eta_i - \beta_j/\eta_j}{\beta_i/\eta_i + \beta_j/\eta_j} \qquad \text{and} \qquad t_{ij} = \frac{2\beta_i/\eta_i}{\beta_i/\eta_i + \beta_j/\eta_j}$$

$\eta_j = \varepsilon_j$ para esta polarización incidente (y $\eta_j = \mu_j$ en la polarización ortogonal) y β_1, β_2 y β_3, son las componentes $\hat{y}$ de los vectores de onda en cada medio.
e) escriba el balance de energía (promedio temporal) si todos los medios son completamente transparentes.
f) ídem e) cuando el medio 2 tiene pérdidas. ¿Cuánto vale la potencia disipada en el medio 2?
g) para medios sin pérdidas e incidencia normal, obtenga la condición para que la lámina sea una capa antirreflectante.
h) haga un gráfico del coeficiente de reflexión en función del ángulo de incidencia para el caso $\mu_j = 1$ (medios no magéticos), $\varepsilon_1 = 2{,}5$ (vidrio), $\varepsilon_2 = -11{,}6 + i\,1{,}2$ (oro en 633 nm) y $\varepsilon_3 = 1$ y sintonice el valore de d/λ para maximizar la absorción. Discuta el resultado.

13. Un PML *(perfectly matching layer)* es un medio absorbente ficticio empleado para simular computacionalmente problemas en regiones abiertas. Considere la relación de dispersión $\mathbf{k}\cdot\mathbf{k} = \varepsilon\mu\,\omega^2/c^2$, donde el vector de onda es $\mathbf{k} = k\,\mathbf{n}$, de tal manera que se cumple que $\mathbf{n}\cdot\mathbf{n} = 1$.
a) Muestre que aún para el caso complejo $\mathbf{n} = \mathbf{n}_r + i\,\mathbf{n}_i$ (y k real) es posible seguir respetando la relación de dispersión. Deduzca cómo deben estar vinculadas $\mathbf{n}_r$ y $\mathbf{n}_i$ para que eso ocurra. ¿Es necesario que siempre se cumpla $|\mathbf{n}|^2 = 1$?
b) Considere la base de soluciones para las ecuaciones de Maxwell $e^{ik\,\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}-\omega t}$. Transforme las coordenadas $\mathbf{r}$ por otras $\mathbf{r}'$, de tal modo que la base de soluciones sea $e^{ik\,\mathbf{n}_r\cdot\mathbf{r}'-\omega t}$. Verifique, además, que sigue siendo válida la ecuación de Helmholtz aplicada sobre el espacio $\mathbf{r}' = (x', y', z')$ y $\nabla' \equiv (\partial_{x'}, \partial_{y'}, \partial_{z'})$
c) La transformación $\mathbf{r} \to \mathbf{r}'$ introduce términos "ficticios" en las ecuaciones de Maxwell. Identifique esos términos a partir de las ecuaciones $\nabla'\times\mathbf{E} = i\omega\mathbf{B}/c$ y $\nabla'\times\mathbf{H} = -i\omega\mathbf{D}/c$. Suponga que la propagación es en la dirección $\hat{\mathbf{x}}$ y que los campos que se propagan son $E_y(x)\,\hat{\mathbf{y}}$ y $H_z(x)\,\hat{\mathbf{z}}$. ¿Es lícito asociar estos términos "ficticios" con las propiedades de un material lineal, isótropo y homogéneo? ¿Es posible hablar de un matrial "real" y de un material "computacional"?
d) Se desea simular una propagación libre por medio de una lámina "ficticia" de espesor d y ubicada en la posición x_0. En la posición $x_0 + d$ se encuentra un conductor perfecto. La lámina tiene índice complejo $\mathbf{n} = 1 - i\,d^{-m}(x - x_0)^m/k$. Calcule el coeficiente de reflexión para los campos del punto anterior. ¿Qué error se cometerá en la simulación?