Formulación covariante de la electrodinámica.

Problemas introductorios.

1. Considere un espacio euclídeo tal que las ternas (x_1, x_2, x_3) y (r, θ, φ) corresponden a un punto del espacio en coordenadas cartesianas y esféricas, respectivamente.

   (a) Muestre que el tensor métrico para el sistema coordenado esférico es

   $$g_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \operatorname{sen}\theta \end{bmatrix} \tag{1}$$

   (b) Para una superficie esférica $r = R$, obtenga la forma co-variante $g_{\alpha\beta}$ y contra-variante $g^{\alpha\beta}$ a partir de la definición

   $$g_{\alpha\beta} = \frac{\partial x_i}{\partial z^\alpha} \frac{\partial x_i}{\partial z^\beta} \quad , \quad g^{\alpha\beta} = \frac{\partial z^\alpha}{\partial x_j} \frac{\partial z^\beta}{\partial x_j} \tag{2}$$

   donde $(z^1, z^2) = (\theta, \varphi)$ y $(x_1, x_2, x_3) = (r \operatorname{sen}\theta \cos\varphi, \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi, r\cos\theta)$.

   (c) Muestre que los vectores

   $$\mathbf{g}_1 = \frac{\partial x_i}{\partial z^1} \mathbf{e}_i \quad , \quad \mathbf{g}_2 = \frac{\partial x_i}{\partial z^2} \mathbf{e}_i \tag{3}$$

   sobre la superficie $r = R$ son tangenciales a $z^2 =$const. y $z^1 =$const., respectivamente. Muestre, además, que $\mathbf{g}_k \cdot \mathbf{g}_l = g_{kl}$ (métrica de la superficie esférica).

2. Demostrar explícitamente que dos transformaciones sucesivas de Lorentz en la misma dirección conmutan y que son equivalentes a una sola transformación de Lorentz con velocidad

   $$v = \frac{v_1 + v_2}{1 + v_1 v_2 / c^2} \tag{4}$$

   (esto es un modo alternativo de obtener la ley de adición de velocidades para el caso en que ambas son paralelas).

3. Demostrar explícitamente que dos transformaciones sucesivas de Lorentz a ángulos rectos (v_1 en la dirección $\hat{x}$ y v_2 en la dirección $\hat{y}$) no conmutan. Demostrar además que en cualquier orden en que son aplicadas, el resultado no es el mismo a una simple transformación con $v = v_1\,\hat{x} + v_2\,\hat{y}$.

4. Encontrar la forma de la ecuación de onda en un sistema S si tiene su forma habitual en el sistema S' y los dos sistemas coordenados están relacionados por una transformación de Galileo. Además, demostrar explícitamente que la forma de esta ecuación es la misma en el sistema S y S' si las coordenadas están relacionadas por una transformación de Lorentz.

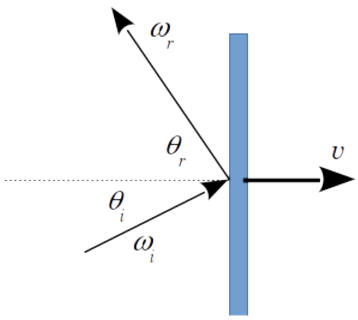
5. Un sistema de coordenadas S' se mueve con velocidad v relativa a otro sistema S. En S', una partícula tiene una velocidad u' y una aceleración a'. Encontrar la ley de transformación de Lorentz para aceleraciones dando las expresiones para las componentes de aceleración paralela y perpendicular a v en el sistema S.

Transformación de los campos y de las fuentes.

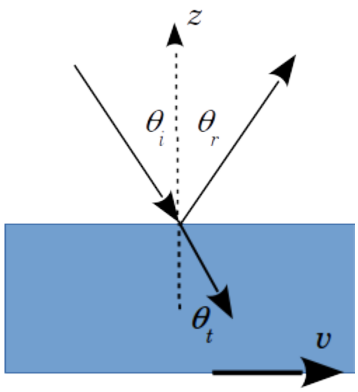
1. Sobre un espejo plano que se mueve con velocidad v paralela a su normal incide luz de frecuencia ω_i con un ángulo de incidencia θ_i, como muestra la figura. Analice los siguientes ítems primero en el sistema fijo y luego en el sistema móvil (sistema solidario al espejo).

   (a) Encuentre la relación entre el ángulo de incidencia y el ángulo de reflexión. Analice el caso $v \ll c$ y compare con el rebote de partículas no relativistas contra una pared en movimiento.

   (b) Encuentre la frecuencia de la onda reflejada. Para incidencia normal analice qué pasa cuando $v \ll c$ y compare con lo que cabría esperar si, en lugar de luz, hubiera un flujo partículas o de sonido contra una pared en movimiento.



2. (Fresnel relativista.) En el sistema de laboratorio, una onda plana, de frecuencia ω y amplitud $\mathbf{E}$, incide desde el vacío sobre la superficie de un líquido de índice de refracción n y $\mu = 1$. El líquido ocupa el semiespacio $z < 0$ y se mueve con velocidad v paralela a su superficie. En el laboratorio, la polarización de la onda puede ser TE o TM. Encuentre la dirección, la amplitud, la polarización y la frecuencia de las ondas transmitidas y reflejadas en el sistema de laboratorio y en el sistema del líquido. ¿Es posible definir en el laboratorio un ángulo análogo al ángulo de Brewster?



3. A partir de la expresión del tensor de intensidad del campo electromagnético, obtener las leyes de transformación de los campos $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$ al cambiar de sistema de referencia inercial. Analizar los siguientes casos particulares: 1) $\mathbf{B} = 0$, $\mathbf{E} \parallel \mathbf{v}$; 2) $\mathbf{B} = 0$, $\mathbf{E} \perp \mathbf{v}$; 3) $\mathbf{E} = 0$, $\mathbf{B} \parallel \mathbf{v}$; 4) $\mathbf{E} = 0$, $\mathbf{B} \perp \mathbf{v}$. Demostrar que:

   a) Si $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$ son perpendiculares en un sistema de referencia, lo mismo sucede en cualquier otro.

   b) Si $|\mathbf{E}| > |\mathbf{B}|$ en un sistema de referencia, esto se cumple en cualquier otro sistema.

   c) Si $\mathbf{E}$ es perpendicular a $\mathbf{B}$ y $|\mathbf{E}| \neq |\mathbf{B}|$, entonces hay un sistema en el cual sólo hay campo eléctrico o solamente magnético. ¿Siempre hay solución? ¿Es única?

4. En un sistema de referencia inercial S, el campo eléctrico forma un ángulo θ con el campo magnético. Ambos campos son uniformes y estáticos.

   a) Encontrar un sistema de referencia S' tal que los campos sean paralelos.

   b) Si en S los módulos de los campos cumplen $B_0 = 2E_0$, calcular los campos en el sistema de referencia hallado en (a). Tomar el límite para $\theta \ll 1$ y para $\theta \to \pi/2$. En cada caso verificar el comportamiento de los invariantes.

5. Un cilindro circular macizo y de longitud infinita tiene densidad de carga y de corriente uniformes. La corriente es paralela al eje del cilindro.

   a) Encontrar un sistema de referencia en el cual sólo hay campo magnético o eléctrico. ¿Es único?

   b) Hallar el valor de los campos en el nuevo sistema.

6. Una barra infinitamente larga y de sección circular está cargada uniformemente en volumen.

   a) Calcular los campos en un sistema de referencia que se mueve paralelo a la barra. Primero, a partir de las distribuciones de carga y corriente en el nuevo sistema, y luego por transformación directa de los campos.

b) Ahora hay dos barras como la anterior, dispuestas una paralela a la otra y en reposo relativo. Demostrar que la fuerza por unidad de longitud sobre cualquiera de las barras, medida en un sistema de referencia S' que se mueve paralelo a ellas, es la misma que en el sistema S en el que las barras están en reposo. Primero, a partir de la fuerza de Lorentz y de los campos en S', y luego demostrando que el objeto $f^\mu \equiv \frac{1}{c} F^\mu_{\ \nu} j^\nu$ es el cuadrivector que es generalización covariante de la densidad de fuerza. Como "yapa" del segundo método, obtener la ley de transformación relativista para la potencia disipada por efecto Joule.

7. Un dipolo magnético puntual $\mathbf{m}$ se encuentra en reposo en el origen de un sistema S', por lo tanto los potenciales en este sistema están dados por $\Phi' = 0$ y $\mathbf{A}' = \mathbf{m} \times \mathbf{r}'/r'^3$. El sistema S' se mueve con velocidad $\mathbf{v}$ respecto al sistema de laboratorio S.

   a) Demostrar que en S los potenciales a primer orden en β son

   $$\Phi = \frac{(\mathbf{v} \times \mathbf{m}) \cdot \mathbf{R}}{c\, R^3}, \qquad \mathbf{A} = \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{R}}{R^3} \tag{5}$$

   con $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t)$, donde $\mathbf{r}_0(t)$ es la posición del origen de S' medida en S.

   b) A partir de estos potenciales, calcular $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$ en S y mostrar que el campo eléctrico se puede escribir de las siguientes maneras alternativas

   $$\begin{aligned}
   \mathbf{E} &= \mathbf{E}_{\text{dipolo}}(\mathbf{p}_{\text{ef}} = \mathbf{v} \times \mathbf{m}/c) - \mathbf{m} \times \frac{[3(\mathbf{n} \cdot \mathbf{v})\mathbf{n} - \mathbf{v}]}{cR^3} \\
   \mathbf{E} &= \mathbf{E}_{\text{dipolo}}(\mathbf{p}_{\text{ef}} = \mathbf{v} \times \mathbf{m}/2c) + \frac{3}{2}\mathbf{n} \times \frac{[(\mathbf{n} \cdot \mathbf{v})\mathbf{m} + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{m})\mathbf{v}]}{cR^3} \\
   \mathbf{E} &= \mathbf{B} \times \mathbf{v}/c,
   \end{aligned}$$

   donde $\mathbf{n} = \mathbf{R}/R$ y $\mathbf{E}_{\text{dipolo}}(\mathbf{p}_{\text{ef}} = \mathbf{p})$ es el campo eléctrico de un dipolo efectivo de valor $\mathbf{p}$.

8. Un hilo con corriente I se encuentra sobre el eje x. La corriente puede atribuirse a una densidad lineal de carga de valor λ_0 que se mueve a velocidad $\mathbf{v} = v\,\hat{x}$, es decir $I = \lambda_0 v$. Obtener el campo eléctrico y magnético de un elemento de carga (con movimiento uniforme) sobre la base de las transformaciones de Lorentz del campo (recuerde que $\mathbf{B} = \beta \times \mathbf{E}$).

9. A partir del problema anterior, obtenga la expresión de Biot-Savart por integración del campo.

10. Dos partículas cargadas se mueven con velocidad constante en direcciones ortogonales. Calcular la fuerza que cada carga ejerce sobre la otra en el instante en que una de las partículas cruza la dirección de movimiento de la otra. Verificar que las fuerzas no son iguales y opuestas. Por lo tanto, no se conserva el impulso lineal de las partículas ¿Hay en ello alguna contradicción?

Trayectorias de partículas cargadas.

11. Encontrar la trayectoria de una partícula cargada en cada caso:

    a) Movimiento en un campo eléctrico uniforme y estático, dirigido según el eje x. La condición inicial es $p_x = p_z = 0$ y $p_y = p_0$. Demostrar que en el límite no relativista se obtiene el resultado conocido de mecánica clásica, es decir, una parábola.

    b) Movimiento en un campo magnético uniforme y estático.

    c) Movimiento en campos $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$ cruzados, perpendiculares entre sí, uniformes y estáticos. Considerar los tres casos posibles: (a) $|\mathbf{E}| > |\mathbf{B}|$, (b) $|\mathbf{E}| < |\mathbf{B}|$ y (c) $|\mathbf{E}| = |\mathbf{B}|$.