Ejercicio de Relatividad tipo parcial

October 31, 2017

Ejercicio: se tiene una partícula de carga q moviendose con una velocidad constante $\vec{v} = v_0\hat{x}$ respecto del sistema laboratorio. Llamando S al sistema laboratorio y S' al sistema propio de la partícula:

(a) Escriba el valor del cuadrivector corriente j^μ en los sistemas S y S'.

(b) Calcule el cuadrivector potencial A^μ que se observa en S.

(c) Utilizando los resultados del ítem anterior calcule los campos $\vec{E}$ y $\vec{B}$ en S.

(d) Definiendo $\vec{r}_\parallel = (\vec{r}\cdot\hat{v})\hat{v}$ y $\vec{r}_\perp = \vec{r} - \vec{r}_\parallel$, escriba la expresión límite de los campos $\vec{E}$ y $\vec{B}$ calculados en el ítem cuando $v \to c$. Exprese los campos en función de $\vec{r}_\parallel$ y $\vec{r}_\perp$.

(e) Compare la expresión obtenida en el ítem anterior con la correspondiente al campo de radiación de una partícula moviendose en una trayectoria acotada.

Resolución:
(a) En el sistema propio de la partícula, el cuadrivector corriente vendrá dado por $j'^\mu = cq\delta(\vec{r}')\delta^{\mu 0}$ con lo cual aplicando la transformación de Lorentz $\Lambda^\mu_\nu(-\vec{\beta})$ se obtiene que:

$$j^\mu = \Lambda^\mu_\nu(-\vec{\beta})j'^\nu = (c\gamma q\delta(\vec{r} - \gamma v_0 t\hat{x}), \gamma v_0 q\delta(\vec{r} - \gamma v_0 t\hat{x}), 0, 0)$$

(b) De vuelta, en el sistema propio de la partícula, el cuadrivector potencial vendrá dado por $A'^\mu = (\frac{q}{r'}, \vec{0})$. Aplicando la misma transformada de Lorentz a este cuadrivector, lo obtenemos en el sistema S:

$$A^\mu = \left(\frac{\gamma q}{[r_\perp^2 + \gamma^2(r_\parallel - v_0 t)^2]^{1/2}}, \frac{\gamma q v_0\hat{x}}{[r_\perp^2 + \gamma^2(r_\parallel - v_0 t)^2]^{1/2}}\right)$$

(c) Utilizando las relaciones usuales entre los campos y los potenciales obtenemos que:

$$\begin{cases} \vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \partial_t\vec{A} = \frac{\gamma q(\vec{r} - v_0 t\hat{x})}{[r_\perp^2 + \gamma^2(r_\parallel - v_0 t)^2]^{3/2}} \\ \vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A} = \frac{\gamma q v_0\hat{x}\times\vec{r}_\perp}{[r_\perp^2 + \gamma^2(r_\parallel - v_0 t)^2]^{3/2}} \end{cases}$$

(d) En el límite $v_0 \to c$ se tiene que $\gamma \to \infty$. Por lo tanto en este límite, $\vec{E} \to \vec{0}$ siempre que $\vec{r}_\parallel \neq v_0 t$. Mientras que $\vec{E} = \vec{E}_\perp \to \infty$ cuando $\vec{r}_\parallel = v_0 t$.

Con lo cual el campo límite debe tener una pinta del estilo $\vec{E} = \vec{F}(\vec{r}_\perp)\delta(r_\parallel - v_0 t)$. Para hallar $\vec{F}$, basta notar que para todo valor de v_0 se tiene que:

$$\int d(r_\parallel - v_0 t)\vec{E}_\perp = 2\gamma q \vec{r}_\perp \int_0^\infty \frac{dy}{[r_\perp^2 + \gamma^2 y^2]^{3/2}} = 2\gamma q \vec{r}_\perp \frac{y}{r_\perp^2 \sqrt{r_\perp^2 + \gamma^2 y^2}}\Bigg|_0^\infty = \frac{2q\vec{r}_\perp}{r_\perp^2}$$

Entonces tenemos que tener que:

$$\lim_{v_0 \to c} \vec{E} = \frac{2q\vec{r}_\perp}{r_\perp^2}\delta(r_\parallel - v_0 t)$$

Y como $\vec{B} = \vec{v} \times \vec{E}$ para todo v_0, entonces:

$$\lim_{v_0 \to c} \vec{B} = \frac{2qc\hat{x} \times \vec{r}_\perp}{r_\perp^2}\delta(r_\parallel - v_0 t)$$

(e) Al igual que los campos de radiación, $|\vec{E}| = c|\vec{B}|$. También sucede que $\vec{E}$, $\vec{B}$ y $\vec{v}$ son mutuamente ortogonales y forman un sistema de mano derecha. Ambos decaen proporcionalmente a una distancia, sólo que estos campos van como $1/r_\perp$ mientras que los de radiación lo hacen como $1/r$.