Ejercicio de Radiación Relativista tipo parcial

November 21, 2017

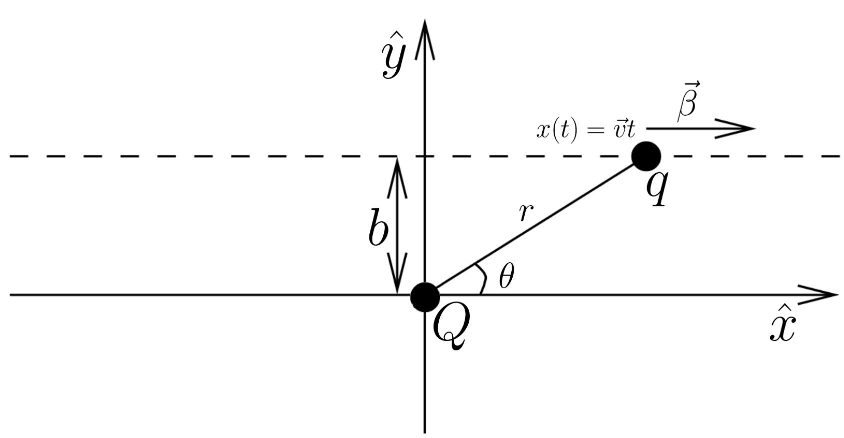
Ejercicio: Una partícula relativista de parámetro β y carga q, atraviesa el potencial debido a otra carga puntual Q (fija). El parámetro de impacto del movimiento tiene un valor $b > 0$ conocido (ver figura). Considere la aproximación bajo la cual el movimiento de la partícula se realiza siempre sobre una misma recta (se desprecia el desvío producido por la interacción). Bajo esta aproximación:

(a) Muestre que la siguiente relación es válida para todo movimiento relativista (no sólo el considerado en este problema) $\frac{1}{mc\gamma^3}\vec{F} = (1-\beta^2)\dot{\vec{\beta}} + \vec{\beta}(\vec{\beta}\cdot\dot{\vec{\beta}})$. Donde $\vec{F}$ es la fuerza que siente la partícula en movimiento.

(b) Utilizando la expresión hallada en el inciso anterior y la fórmula de Larmor relativista, halle la dependencia de la potencia total radiada con la fuerza $P(\vec{F})$.

(c) Por medio del resultado obtenido en (b), encontrar la potencia radiada en función de la posición sobre la trayectoria $P(\vec{r})$.

(d) Por último, Mostrar que la energía total irradiada por la particula a lo largo de todo el movimiento viene dada por $\Delta W = \int_{-\infty}^{\infty} P dt = \frac{2\pi q^4 Q^2}{3m^2c^4\beta b^3}\left(\gamma^2 + \frac{1}{3}\right)$.



Resolución:
(a) Por la generalización relativista de la ley de Newton tenemos que:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\gamma\vec{v}) = mc\frac{d}{dt}\frac{\vec{\beta}}{\sqrt{1-\beta^2}} = mc\gamma^3\left[(1-\beta^2)\dot{\vec{\beta}} + \vec{\beta}(\vec{\beta}\cdot\dot{\vec{\beta}})\right] \tag{1}$$

Que prueba lo que se nos pide.

(b) La fórmula de Larmor relativista nos dice que $P = \frac{2q^2\gamma^6}{3c}(\dot{\beta}^2 - |\vec{\beta}\times\dot{\vec{\beta}}|^2)$. Donde el segundo término del segundo factor se puede reescribir como $|\vec{\beta}\times\dot{\vec{\beta}}|^2 = \beta^2\dot{\beta}^2 - (\vec{\beta}\cdot\dot{\vec{\beta}})^2$ obteniendose que

$$P = \frac{2q^2\gamma^6}{3c}\left(\frac{1}{\gamma^2}\dot{\beta}^2 + (\vec{\beta}\cdot\dot{\vec{\beta}})^2\right) \tag{2}$$

Por otro lado, multiplicando (1) por $\vec{\beta}$ se obtiene que

$$\vec{\beta}\cdot\dot{\vec{\beta}} = \frac{1}{mc\gamma^3}\vec{\beta}\cdot\vec{F} \tag{3}$$

Reemplazando (3) en (1) se obtiene que

$$\dot{\vec{\beta}} = \frac{1}{mc\gamma}[\vec{F} - \vec{\beta}(\vec{\beta}\cdot\vec{F})] \tag{4}$$

Y utilizando esta expresión en (2) finalmente se llega al resultado buscado

$$P(\vec{F}) = \frac{2q^2\gamma^2}{3m^2c^3}[F^2 - (\vec{\beta}\cdot\vec{F})^2] \tag{5}$$

(c) Como la fuerza es coulombiana, si se asume que la partícula se mueve aproximadamente en una línea, se tendrá que

$$\begin{cases} F_\perp \sim \frac{qQ}{r^2}\cos\theta = \frac{qQ}{r^2}\frac{b}{r} \\ F_\parallel \sim \frac{qQ}{r^2}\sin\theta = \frac{qQ}{r^2}\frac{\sqrt{r^2-b^2}}{r} \end{cases} \tag{6}$$

Usando este resultado en (5) se obtiene que

$$P(r) = \frac{2q^4Q^2}{3m^2c^3}\left[\frac{b^2(\gamma^2-1)}{r^6} + \frac{1}{r^4}\right] \tag{7}$$

(d) Ahora estamos en condiciones de calcular la energía total radiada por la particula durante todo el movimiento. En lugar de integrar en función del tiempo, integraremos en función del radio

$$\Delta W = \int_{-\infty}^{\infty} dt\ P = 2\int_b^{\infty} dr\frac{P(r)}{dr/dt} \tag{8}$$

Pero tenemos usando que $r(t) = \sqrt{v^2t^2 + b^2}$ y $vt = \sqrt{r^2 - b^2}$ se puede calcular que $dr/dt = \frac{2v\sqrt{r^2-b^2}}{r}$, con lo cual se llega a que

$$\Delta W = \frac{2q^4Q^2}{3m^2c^4\beta} \int_b^\infty \frac{dr}{\sqrt{r^2-b^2}} \left(\frac{b^2(\gamma^2-1)}{r^5} + \frac{1}{r^3} \right) = \frac{2q^4Q^2}{3m^2c^4\beta b^3} \int_1^\infty \frac{du}{\sqrt{u^2-1}} \left(\frac{(\gamma^2-1)}{u^5} + \frac{1}{u^3} \right)$$

Donde en la última igualdad se hizo el cambio de variable $r = bu$. Por último, tomando como dato[1] que

$$\begin{cases} \int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{2}\left[\sqrt{1/x^2 - 1/x^4} - \tan^{-1}\left((x^2-1)^{-1/2}\right)\right] + c \\ \int \frac{dx}{x^5\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{8}\left[\sqrt{1/x^6 - 1/x^8}(3/x^2 + 2/x^4) - 3\tan^{-1}\left((x^2-1)^{-1/2}\right)\right] + c' \end{cases}$$

Y usando que $\lim_{z\to\infty} \tan^{-1} z = \frac{\pi}{2}$ y $\lim_{z\to 0} \tan^{-1} z = 0$ se llega finalmente a que

$$\Delta W = \frac{2q^4Q^2\pi}{3m^2c^4\beta b^3} \left(\gamma^2 + \frac{1}{3} \right) \tag{9}$$

[1] En un escenario de parcial lo hubieramos anotado en el pizarrón.