PROBLEMA 1. Espejo plano en movimiento

Vamos a completar las cuentas del ejercicio que dimos en la clase del miércoles.
Planteamos los campos eléctricos incidentes y reflejados, partiendo de la Figura (1), realizada con el arte que sólo Paint es capaz de proporcionar.

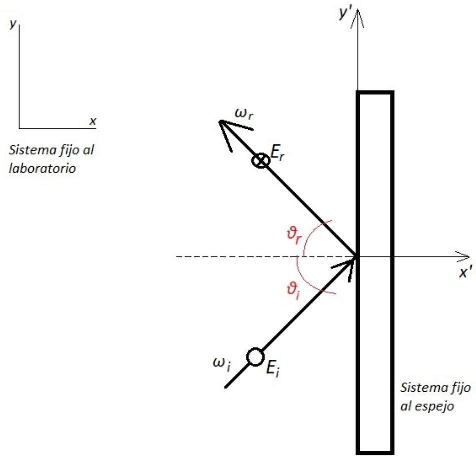

Figura 1

Estos campos van a ser:

$$\vec{E_i} = \hat{z} E_i e^{i\phi_i} \tag{1}$$

$$\vec{E_r} = \hat{z} E_r e^{i\phi_r} \tag{2}$$

donde en el contorno tendremos

$$\vec{E_i} = -E_r \tag{3}$$

$$\phi_i = \phi_r \tag{4}$$

Escribimos explícitamente a las fases

$$\phi_i = \vec{k_i}\vec{r} - \omega_i t = \frac{\omega}{c} cos\theta_i x + \frac{\omega_i}{c} sen\theta_i y - \omega_i t \tag{5}$$

$$\phi_r = \vec{k_r}\vec{r} - \omega_r t = -\frac{\omega_r}{c} cos\theta_r x + \frac{\omega_r}{c} sen\theta_i y - \omega_r t \tag{6}$$

Si nos posicionamos sobre el sistema solidario al espejo, tendremos que el mismo está en reposo y por lo tanto vale $x = 0$. Pidiendo que se cumpla la condición $\phi_i = \phi_r$ (que es invariante!!), llegamos a las siguientes ecuaciones:

$$\left(\frac{\omega_i}{c}sen\theta_i - \frac{\omega_r}{c}sen\theta_r\right) y = 0 \tag{7}$$

$$(\omega_i = \omega_r)t = 0 \tag{8}$$

De estas dos relaciones obtenemos que, para el sistema en reposo, vale $sen\theta_i = sen\theta_r$ y $\omega_i = \omega_r$.

Ahora, ¿qué pasa si pedimos que el contorno se mueva con velocidad $\vec{v} = v\hat{x}$? ¿Cómo influye sobre el contorno? En este caso, lo único que debemos hacer es reemplazar a $x \to x = vt$. De esta forma obtenemos el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$(\frac{\omega_i}{c}vcos\theta_i + \frac{\omega_r}{c}vcos\theta_r - \omega_i + \omega_r)t = 0 \tag{9}$$

$$\left(\frac{\omega_i}{c}sen\theta_i - \frac{\omega_r}{c}sen\theta_r\right) y = 0 \tag{10}$$

y reemplazando $\beta = \frac{v}{c}$

$$(1 - \beta cos\theta_i)\omega_i = (1 + \beta cos\theta_r)\omega_r \tag{11}$$

$$\omega_i sen\theta_i = \omega_r sen\theta_r \tag{12}$$

Para resolver este sistema no lineal, dividimos las ecuaciones entre sí.

$$\frac{sen\theta_i}{1 - \beta cos\theta_i} = \frac{sen\theta_r}{1 + \beta cos\theta_r} = m \tag{13}$$

Esta es una igualdad donde, de un lado, las cosas dependen de θ_r y del otro lado, dependen de θ_i. De modo que esta relación es constante. Elegimos la letra $m =$ constante.

Ambos ángulos están como argumento de dos funciones trigonométricas y lo que quiero hacer es combinar ambas funciones en una sola. Para hacerlo, vamos a explicitar el paso a paso de la magia negra que salteamos en clase. He aquí:

Lo primero que hacemos es invertir la relación que teníamos en (13).

$$\frac{1}{m} = \frac{1 + \beta cos\theta_r}{sen\theta_r} = \frac{1 + cos\theta_r}{sen\theta_r} + (\beta - 1)\frac{cos\theta_r}{sen\theta_r} \tag{14}$$

$$\frac{1}{m} = \frac{1}{tan(\frac{\theta_r}{2})} + (\beta - 1)\frac{1}{tan(\theta_r)} \tag{15}$$

donde fíjense que usamos las identidades

$$tan\frac{\theta}{2} = \frac{sen\theta}{1 + cos\theta} \qquad\qquad tan(\theta) = \frac{1 - tan^2(\frac{\theta}{2})}{2tan\frac{\theta}{2}}$$

Ahora, lo que haremos es reescribir la ecuación (15) usando las mismas identidades. Lo único que se hace es despejar. Confío *ciegamente* en sus capacidades trigonométricas para lograr el siguiente resultado:

$$1+\frac{\beta-1}{2}\left(1-tan^2(\frac{\theta_r}{2})\right)=\frac{1}{m}tan\frac{\theta_r}{2} \tag{16}$$

$$\frac{1-\beta}{2}tan^2(\frac{\theta_r}{2})-\frac{1}{m}tan\frac{\theta_r}{2}+\frac{2+\beta-1}{2}=0 \tag{17}$$

$$\Rightarrow tan^2(\frac{\theta_r}{2})-\frac{2}{m}\frac{1}{1-\beta}tan\frac{\theta_r}{2}+\frac{1+\beta}{1-\beta}=0 \tag{18}$$

Aplicamos la resolvente para obtener el valor de $tan\frac{\theta_r}{2}$

$$tan\frac{\theta_r}{2}=\frac{1}{m}\frac{1}{1-\beta}\pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4}{m^2}\frac{1}{(1-\beta)^2}-4\frac{1+\beta}{1-\beta}} \tag{19}$$

$$=\frac{-1\pm\sqrt{1-m^2(1-\beta^2)}}{m(1-\beta)} \tag{20}$$

Fíjense que esta relación podría haberse obtenido con θ_i, reemplazando $\beta\to-\beta$. Es decir,

$$tan\frac{\theta_i}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{1-m^2(1-\beta^2)}}{m(1+\beta)} \tag{21}$$

Entonces podemos igualar la ecuación 21 con 19 y llegamos:

$$m(1-\beta)tan(\frac{\theta_r}{2})=m(1+\beta)tan(\frac{\theta_i}{2}) \tag{22}$$

$$\Rightarrow tan(\frac{\theta_r}{2})=\frac{1+\beta}{1-\beta}tan(\frac{\theta_i}{2}) \tag{23}$$

y es el mismo resultado que habíamos obtenido en la clase del lunes.

¿Y si lo pensamos con fotones?

Veamos qué pasa cuando trabajamos con partículas de energía $E=h\nu$ y masa en reposo nula. Sabemos que valen las siguientes relaciones

$$E=cp\Rightarrow p=\frac{E}{c}\Rightarrow p=\frac{h\nu}{c} \tag{24}$$

Si escribimos el invariante $P^\mu P_\mu=0$ (dado que estamos viendo el caso de fotones):

$$P^{\mu'}P_{\mu'}=P^\mu P_\mu=\frac{E^2}{c^2}-\vec{p}\,^2=0 \tag{25}$$

que, insisto, es invariante y vale para cualquier sistema. Recordemos que $P^\mu = (\frac{E}{c}, p_x, p_y, p_z)$ y es un cuadrivector que transforma por Lorentz.

$$\frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^{\,2} = 0 \tag{26}$$

$$\frac{E'^2}{c^2} - \vec{p'}^{\,2} = 0 \tag{27}$$

Si prestamos atención a las relaciones que acabamos de obtener podemos notar que la energía del fotón depende del observador!

Para resolver el problema, podemos usar lo que sabemos de superficies en reposo, nuevamente. Algo que sabemos es que la energía se conserva en un "choque" con una superficie en reposo. De modo que, al igual que en los otros casos que vimos, debemos posicionarnos en el sistema solidario al espejo.

Como P^μ transforma como cuadrivector, tenemos que

$$\begin{bmatrix} \frac{E'}{c} \\ p'_x \\ p'_y \\ p'_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{E}{c} \\ p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix}$$

y a partir de este sistema, obtenemos:

$$E' = \gamma(E - \beta c p_x) \tag{28}$$

$$p'_x = \gamma(p_x - \beta\frac{E}{c}) \tag{29}$$

Llamando ν_i a la frecuencia inicial y suponiendo incidencia normal (para facilitar las cosas), reemplazamos en 29 y llegamos a

$$E'_i = \gamma(h\nu_i - \beta c\frac{h\nu_i}{c}) = h\nu'_i \tag{30}$$

y, por conservación de la energía, será igual a la energía del rebote $E'_r \implies E'_r = E'_i$.

Antitransformando, podemos alcanzar una relación para E_r. Es decir,

$$E_r = \gamma\left(h\nu'_i + \beta c\left(\frac{-h\nu'_i}{c}\right)\right) = h\nu_r \tag{31}$$

Usando las expresiones que ya calculamos para ν_i', reemplazamos en la ecuación 31:

$$h\nu_r = \gamma^2[h\nu_i - \beta h\nu_i + \beta(-h\nu_i + \beta h\nu_i)] \tag{32}$$

$$h\nu_r = \gamma^2 h\nu_i[1 - 2\beta + \beta^2] \tag{33}$$

$$h\nu_r = \gamma^2(1-\beta)^2 h\nu_i \tag{34}$$

y recuperamos nuestro resultado del efecto Doppler para incidencia normal, es decir

$$\nu_r = \left(\frac{1-\beta}{1+\beta}\right)\nu_i \tag{35}$$