

### Algunos métodos de Física Teórica usados en Electrodinámica

1. Escriba la densidad de carga  $\rho(\vec{x})$  en todo punto del espacio  $\vec{x}$  para una carga puntual  $q$  ubicada en la posición  $\vec{x}'$ . Se pide el resultado en los casos en que tanto  $\vec{x}$  como  $\vec{x}'$  vienen expresados en coordenadas y componentes i) cartesianas, ii) esféricas, y iii) cilíndricas.
2. Escriba la densidad de carga  $\rho(\vec{x})$  en todo punto del espacio  $\vec{x}$  para un dipolo eléctrico puntual  $\vec{p}$  ubicado en la posición  $\vec{x}'$ .
3. Escribiremos la dependencia temporal de cualquier cantidad  $F(\vec{x}, t)$  en términos de su *transformada de Fourier*  $F_\omega(\vec{x})$  de la siguiente manera

$$F(\vec{x}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} F_\omega(\vec{x}) e^{-i\omega t} d\omega .$$

i) Convéznase que la transformada  $F_\omega(\vec{x})$  se escribe como una integral similar con un factor  $+i$  en la exponencial y dividida por  $2\pi$ . En la bibliografía veremos variaciones que difieren en el signo de la unidad imaginaria en la exponencial y en donde se coloca el factor  $2\pi$  (es molesto pero hay que familiarizarse).

ii) Escriba los desarrollos de Fourier temporales para los campos eléctrico  $\vec{E}(\vec{x}, t)$  y magnético  $\vec{B}(\vec{x}, t)$ .

iii) demuestre que en el vacío y en regiones sin fuentes, las transformadas de Fourier  $\vec{E}_\omega(\vec{x})$  y  $\vec{B}_\omega(\vec{x})$  satisfacen *ecuaciones de Helmholtz homogéneas* de la forma

$$\nabla^2 \vec{F}_\omega + k^2 \vec{F}_\omega = 0, \quad \text{con} \quad k^2 \equiv \frac{\omega^2}{c^2}$$

iv) En *medios lineales, isotropos y homogéneos* como el vidrio o el agua, las ecuaciones constitutivas se escriben muy sencillamente usando las transformadas de Fourier de los campos (atención: **no** los campos) en la forma  $\vec{D}_\omega(\vec{x}) = \epsilon \vec{E}_\omega(\vec{x})$  y  $\vec{B}_\omega(\vec{x}) = \mu \vec{H}_\omega(\vec{x})$ . Demuestre que todas las transformadas de Fourier de los campos también satisfacen ecuaciones de Helmholtz homogéneas como las del punto anterior, pero ahora  $k^2 \equiv \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon \mu$ .

v) Observe que el operador  $\nabla^2$  en las ecuaciones de Helmholtz anteriores es un *operador vectorial* que en general no coincide con el laplaciano de las componentes de  $\vec{F}_\omega$ . Escriba expresiones para  $\nabla^2 \vec{F}_\omega$  en coordenadas y componentes cartesianas, cilíndricas y esféricas.

vi) Use el *método de separación de variables* para demostrar que todas las componentes cartesianas de las transformadas de Fourier de los campos se pueden escribir como producto de funciones exponenciales de las coordenadas  $x$ ,  $y$  y  $z$ . ¿Qué relación hay entre las constantes de separación y la frecuencia  $\omega$ ?

vii) Observe que el análisis de Fourier y la separación de variables conducen a *soluciones elementales* de la forma

$$e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)}$$

para la ecuación de Helmholtz, con  $\vec{k}$  un vector formado por las constantes de separación. También observe que de acuerdo al valor que tomen las constantes de separación, estas soluciones elementales pueden representar *comportamientos físicos* muy diversos. En particular explicité condiciones para propagación periódica y para comportamientos reactivos.

viii) Usando las ecuaciones de Maxwell, determine las *orientaciones relativas* entre los vectores  $\vec{D}_\omega(\vec{x})$ ,  $\vec{E}_\omega(\vec{x})$ ,  $\vec{B}_\omega(\vec{x})$  y  $\vec{H}_\omega(\vec{x})$ .

4. Una *onda electromagnética plana monocromática* (una de las soluciones elementales vistas en el problema anterior) *se propaga* (esto dice algo sobre las constantes de separación del problema anterior) en el vacío en dirección perpendicular a la superficie de una espira rectangular conductora

de lados  $a$  y  $b$ . Si el campo eléctrico de la onda es paralelo al lado  $b$  de la espira

- i) Calcule el valor eficaz de la f.e.m. inducida sobre la espira rectangular.
- ii) ¿Cuánto debería valer  $a$  para obtener el máximo valor de la f.e.m.?

5. El núcleo de un *cable coaxial* es un conductor perfecto de sección circular con eje de simetría en la dirección  $\hat{z}$  que está recubierto por un espesor constante de dieléctrico con permitividad  $\epsilon$  y permeabilidad  $\mu$  a las frecuencias de trabajo. Un mallado perfectamente conductor en contacto con el dieléctrico envuelve todo el conjunto. El cable se usa para *confinar* campos oscilatorios en dos dimensiones (la sección del cable), permitiendo a la vez que los campos oscilatorios se propaguen como ondas en la dimensión restante (el eje de simetría). Antes de seguir con cuentas conviene leer una linda discusión sobre el funcionamiento de este cable en la *sección 24-1* del tomo II del libro de Feynman.

- i) Escriba las ecuaciones que satisfacen los campos  $\vec{E}_\omega(\vec{x})$  y  $\vec{H}_\omega(\vec{x})$  en el interior del dieléctrico en el caso especial de los *modos TEM* en que ambos campos no tienen componentes a lo largo de la dirección  $\hat{z}$
- ii) Resuelva las ecuaciones y las condiciones de contorno para encontrar  $\vec{E}_\omega(\vec{x})$  y  $\vec{H}_\omega(\vec{x})$ . Esquematice las *líneas de campo* para distintos valores de  $z$  y  $t$ .

6. Considere la *guía de ondas rectangular* esquematizada en la Figura 24.3 del tomo II del libro de Feynman. Lea el comienzo de la sección 24-2 de este libro, donde se menciona la manera misteriosa en que para frecuencias altas un cable de circuitos con capacitores e inductancias se puede reemplazar simplemente por un caño de lata perfectamente conductora. La pregunta es cuál es la periodicidad más grande que entra en la guía.

- i) siguiendo a Feynman considere el caso especial en que  $\vec{E}_\omega(\vec{x}) = E_{\omega y}(x, z) \hat{y}$  no depende de la coordenada  $y$  y sólo tiene componente en la dirección  $\hat{y}$  (¿cómo obtener en la práctica este tipo de campos?). Pruebe que  $E_{\omega y}(x, z)$  satisface una ecuación de Helmholtz y use el método de separación de variables para demostrar que

$$E_{\omega y}(x, z) = A e^{ik_z z} \sin k_x x, \quad k_x = n \frac{\pi}{a}, \quad k_x = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2}$$

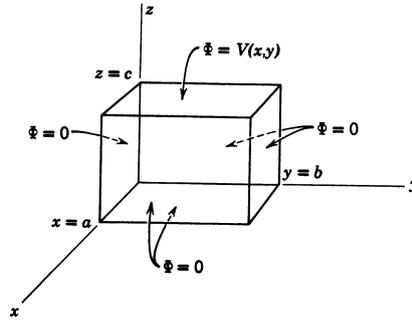
(comparar estas expresiones con las ecuaciones 24.12, 24.14 y 24.17). Escriba el campo magnético  $\vec{H}_\omega(\vec{x})$  que acompaña a  $E_{\omega y}(x, z)$ . Haga un esquema de las líneas de campo electromagnético como el de la Figura 24.6 para distintos valores de  $z$  y  $t$ . ¿A qué valor de  $n$ , es decir, de la constante de separación  $k_x$  corresponde dicha figura? ¿Cambia el dibujo vale para otros valores de la frecuencia  $\omega$ ? Con su herramienta numérica preferida grafique las líneas de campo para otros valores de  $n$ .

- ii) Analice el caso en que  $k_z^2$  es negativo (*comportamiento reactivo*). El valor crítico de  $\omega$  en que  $k_z = 0$  se llama *frecuencia de corte*, se discute en la sección 24.3 del tomo II del libro de Feynman.
- iii) recordando lo visto en el curso de ondas, analice las *velocidades de fase y de grupo* asociadas a los campos estudiados.

iv) generalice los resultados anteriores cuando el interior de la guía de ondas rectangular con paredes perfectamente conductoras contiene un medio lineal, isotrópico y homogéneo caracterizado por  $\epsilon$  y  $\mu$ , la permitividad y la permeabilidad a las frecuencias de trabajo.

7. Hallar el *potencial electrostático interior* para las siguientes cajas rectangulares

- i) caja de la figura, todas las caras conectadas a tierra, excepto la tapa en  $z = c$  que se mantiene a un potencial  $V_0$  constante.
- ii) todas las caras a tierra, excepto las tapas en  $z = 0$  y en  $z = c$  que se mantienen ambas a un potencial  $V_0$  constante.
- iii) todas las caras a tierra, excepto las tapas en  $z = 0$  y en  $z = c$  que se mantienen a potenciales constantes  $-V_0$  y  $V_0$  respectivamente.
- iv) todas las caras a tierra, excepto las caras en  $y = 0$  y en  $z = 0$  que se mantienen a potenciales



constantes  $V_1$  y  $V_2$  respectivamente.

v) las seis caras se mantienen a potenciales constantes  $V_i$ ,  $i = 1, \dots, 6$ .

8. Hallar el potencial electrostático *en todo el espacio* para una caja como la de la figura
  - i) con todas las caras a tierra excepto las caras en  $z = 0$  y en  $z = c$  que se mantienen a potenciales  $V_1(x, y)$  y  $V_2(x, y)$  respectivamente.
  - ii) con todas las caras a tierra, pero en vez de estar vacía contiene dos tipos de *fuentes*: una carga puntual  $q$  y una lámina rectangular uniformemente cargada con carga total  $Q$ , forma y tamaño idénticos a las tapas y paralela a ellas.
  
9. En un campo electrostático uniforme en el infinito de valor  $E_0 \hat{z}$  se sumerge una esfera de radio  $R$ , hecha de un material lineal, isotrópico y homogéneo. Los parámetros constitutivos de este material para campos de continua (frecuencia cero) valen  $\epsilon$  y  $\mu$ .
  - i) Hallar los campos en todo punto del espacio y las cargas inducidas en el medio material.
  - ii) Observe que la modificación del campo exterior debida a la esfera se puede atribuir a un dipolo inducido en la esfera de momento dipolar paralelo y proporcional al campo inductor, el coeficiente de proporcionalidad es la *polarizabilidad* de la esfera. iii) ¿Cómo espera que cambie la polarizabilidad si en vez de una esfera se tiene un elipsoide? ¿Y para un elipsoide de revolución??
  - iv) ¿Cómo espera que cambien los resultados anteriores si el campo externo comienza a oscilar lentamente, es decir tiene la forma  $E_0 e^{-i\omega t} \hat{z}$ ? Para responder a esta pregunta ayuda atreverse a mirar las expresiones (que demostraremos más adelante) (9.19) y (9.20) de J3 (Jackson, 3ra edición) para los *campos electromagnéticos lejanos y cercanos* respectivamente (MKS), producidos por un *dipolo oscilante*.
  
10. Una esfera de radio  $R$  está uniformemente magnetizada con densidad  $\vec{M} = M \hat{z}$ .
  - i) Calcular los campos  $\vec{B}$  y  $\vec{H}$  de este *imán esférico* mediante el método de separación de variables para el potencial escalar magnético  $\Phi_H$  tal que  $\vec{H} = -\vec{\nabla} \Phi_H$ . Comparar  $\Phi_H$  en el exterior de la esfera con el producido por un dipolo magnético puntual igual al momento dipolar total de la esfera.
  - ii) ¿A cuál problema electrostático es formalmente equivalente este problema para  $\Phi_H$ ? ¿Se podría evitar usar la separación de variables para encontrar los campos  $\vec{B}$  y  $\vec{H}$  del imán esférico? La respuesta es afirmativa y es instructivo desarrollar el método alternativo hasta sus últimas consecuencias.
  
11. La superficie lateral de una caja cilíndrica circular conductora (radio  $R$ , altura  $h$ ) está conectada a tierra, mientras que las tapas se conectan a potenciales  $V$  y  $-V$ . Hallar el potencial electrostático en el interior del cilindro.
  
12. Considere las siguientes variaciones de problemas de separación de variables en coordenadas cilíndricas para el potencial electrostático
  - i) Problema interno, caja cilíndrica de sección circular a tierra, radio  $R$ , longitud  $L$ , carga puntual interior. Observe que la separación en regiones típica de los métodos de separación de variables se puede realizar de dos maneras distintas. Una, usando un plano virtual perpendicular al eje del

cilindro que contenga a la carga. Y otra, usando un cilindro virtual concéntrico que contenga a la carga. Explore ambas posibilidades y compare.

ii) Problema interno, caja cilíndrica circular a tierra, radio  $R$ , longitud infinita, carga puntual interior, dos maneras de separar regiones, compare.

iii) Problema externo, caja cilíndrica circular a tierra, radio  $R$ , longitud infinita, carga puntual en el exterior. ¿Cual separación entre regiones funciona mejor?

iv) Problema interno, caja cilíndrica a tierra de radio  $R$  y longitud infinita, carga puntual interior, la sección ya no es circular, si no un sector de círculo, de ángulo  $\beta = \pi/2$ . ¿Qué cambios se deben introducir para otros valores de  $\beta$ ?

13. Comentario para saber más. Vale la pena mencionar que las soluciones de cualquier problema electrostático en presencia de recintos con paredes a tierra, y con una carga puntual  $q$  en una posición arbitraria, no son otra cosa que las *funciones de Green tipo Dirichlet* para la ecuación de Poisson  $\nabla^2\Phi(\vec{x}) = -4\pi\rho(\vec{x})$  (notar de paso que la ecuación de Poisson es el caso especial  $k = 0$  de la ecuación de Helmholtz cuya función de Green veremos más adelante). Esto es así porque la función de Green de la ecuación de Poisson se obtiene reemplazando la inhomogeneidad de la ecuación diferencial, la densidad de cargas  $\rho(\vec{x})$ , por  $\delta(\vec{x} - \vec{x}')$ , es decir, por la densidad de cargas de una carga puntual unidad ubicada en la posición arbitraria  $\vec{x}'$ . Y como cualquier  $\rho$  se construye a partir de sumar elementos puntuales de carga, si tenemos la solución para una carga puntual entonces tenemos por superposición la solución para cualquier  $\rho$ . Si te interesa el tema electrostático, mirá por ejemplo Sección 1.10 y 2.6 de J3.