Problemas con fuentes

1. Hendrik Antoon Lorentz (premio Nobel 1902) resolvió las ecuaciones diferenciales homogéneas para los potenciales producidos por una carga puntual en movimiento rectilíneo uniforme. De más está decir que no usó condiciones de medida ajenas. Para seguir sus pasos:
a) sin pérdida de generalidad suponga $\vec{v} = v\,\hat{z}$ y escriba las funciones $\rho(\vec{x}, t)$ y $\vec{J}(\vec{x}, t)$.
b) mediante un cambio de variable asociado a la coordenada z, demuestre que el potencial $\phi(\vec{x}, t)$ satisface una ecuación de Poisson. Discuta semejanzas y diferencias con la ecuación de Poisson que satisface el potencial coulombiano.
c) encuentre el potencial vector $\vec{A}(\vec{x}, t)$
d) demuestre que los campos toman la forma
$$\vec{E}(\vec{x}, t) = q\,\frac{\hat{R}}{R^2}\,\frac{1-\beta^2}{(1-\beta^2\sin^2\theta)^{3/2}}\,, \qquad \vec{B}(\vec{x}, t) = \frac{\vec{v}}{c^2}\times\vec{E}(\vec{x}, t)$$
$\beta = v/c$, el vector $\vec{R}$ apunta al punto campo desde la posición que tiene la carga en el momento de la medición y forma un ángulo θ con el vector $\vec{v}$.
e) grafique las líneas de campo electromagnético.

2. En el límite no relativista $v \ll c$ del problema anterior: a) demuestre que el campo magnético exacto se puede aproximar por el campo que se obtendría aplicando la ley de Biot-Savart; b) compruebe que en esta aproximación los campos satisfacen la ley de Ampère-Maxwell pero no la ley de Faraday (situación conocida como *aproximación cuasi-electrostática*: siempre que la fuente sea una densidad de carga $\rho(\vec{x}, t)$ con variación temporal lenta, se puede despreciar $\partial\vec{B}/\partial t$).

3. Como complemento del problema 2 y anticipo del problema 4, veamos un ejemplo de aplicación de la *aproximación cuasi-magnetostática*: siempre que la fuente sea una densidad de corriente $\vec{J}(\vec{x}, t)$ con variación temporal lenta, se puede despreciar $\partial\vec{E}/\partial t$. Que, parafraseando, quiere decir que el campo magnético de Ampère de una densidad de corriente lenta es más importante que el el campo magnético de la corriente de desplazamiento. El problema es el de un solenoide de sección circular (radio a) e infinitamente largo. El cable enrollado tiene n vueltas por unidad de longitud y conduce la corriente $I(t) = I_0\cos\omega t$. Considere que la dirección $\hat{z}$ coincide con el eje del solenoide.
a) usando la aproximación cuasi-magnetostática, halle $\vec{B}$ y $\vec{E}$ en todo punto del espacio.
b) en tren de aproximar mejor, reintroduzca la corriente de desplazamiento y estime una corrección de primer orden para el campo magnético fuera del solenoide. Discuta la aparición de comportamientos divergentes en la integración resultante.

4. Solución exacta para los campos electromagnéticos producidos por el solenoide del problema 3.
a) encuentre la ecuación diferencial no homogénea para el potencial vector $\vec{A}_C$ en la *medida de Coulomb*.
b) Demuestre que $\vec{A}_C(\rho, t) = A(\rho)\, \exp(-i\,\omega t)\, \hat{\phi}$ y que $A(\rho)$ satisface ecuaciones de Bessel en las zonas internas y externas del solenoide.
c) Encuentre el potencial vector (real) $\vec{A}_C$ en cualquier punto de observación.
d) Obtenga los campos electromagnéticos $\vec{B}$ y $\vec{E}$ en todo punto.
e) Mediante límites adecuados, verifique los resultados obtenidos en el problema 3.
f) Calcule la potencia por unidad de área que pasaría a través de una supuesta superficie cilíndrica, concéntrica y muy alejada del solenoide. ¿Es direccional éste flujo?
g) Hablemos de radiación. Demuestre que el promedio temporal de potencia total por unidad de longitud que pasa por la supuesta superficie del punto f) no depende de su radio. ¿Cuál es el promedio temporal de potencia total por unidad de longitud que pasa por *cualquier* superficie alejada que encierre al solenoide?
h) Hablemos del precio. En promedio temporal, ¿cuánto vale la potencia que deben entregar los generadores para mantener al solenoide irradiando?

5. A partir de los potenciales retardados, demuestre las expresiones (6.55) y (6.56) de J3 para los campos retardados producidos por fuentes localizadas. Pero por favor, escriba todo en el sistema cgs. Estas expresiones pueden ser consideradas generalizaciones transparentes de las leyes de Coulomb y de Biot-Savart. En la literatura reciben el nombre de campos retardados de Jefimenko (1966) y también fórmulas de Schott (que las obtuvo en el dominio frecuencial en 1912).

6. Considere nuevamente el momento dipolar inducido sobre el átomo estudiado en el problema 3 (guía 1). Asuma que la amplitud de la oscilación a es muy pequeña, tal que $a \ll \lambda$ (siendo λ la longitud de onda asociada al movimiento del electrón).

   a) Escriba el potencial vector $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ debido a la densidad de corriente dada por el movimiento del electrón. Suponga que no hay ningún otro tipo de corrientes debidas a las condiciones de contorno (*i.e.* condición de borde abierta). Asegúrese de que la expresión cumpla la condición de causalidad.

   b) Dado que la amplitud de oscilación es muy pequeña, puede considerar que $a \ll r$. En ese caso vale aproximar $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \simeq r - \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}'$ ¿por qué?. Expanda la expresión del punto anterior hasta el término de primer orden comparable con ka. Obtenga el campo $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, y el correspondiente campo eléctrico $\mathbf{E}$.

   c) Analice los campos $\mathbf{B}$ y $\mathbf{E}$ en posiciones cercanas a la fuente, de tal manera que $kr \ll 1$. Obtenga el vector de Poynting para esta región cercana a la fuente. ¿Qué ocurre con el flujo de potencia cuando $k \to 0$.

d) Realice el mismo análisis para regiones lejanas a la fuente, de tal manera que $kr \gg 1$. Obtenga el vector de Poynting para esta región.

7. Un hilo conductor tiene longitud total d ($d \ll \lambda$). Desde el centro del conductor ingresa una corriente $I_0\, e^{-i\omega t}$, de tal manera que ésta alcanza una distribución estacionaria $I(z)\, e^{-i\omega t}$.

   a) Suponga que $I(z)$ es lineal con condición de borde nula en los extremos, es decir, $I(z) = I_0\,(1 - 2|z|/d)$. Obtenga los campos $\mathbf{B}$ y $\mathbf{E}$ en la región de radiación (*i.e.* zona lejana).

   b) Calcule el flujo medio de potencia emitida y la potencia media total irradiada. Grafique un diagrama de radiación.

   c) Repita los cálculos anteriores para un tramo de hilo similar tal que $I(z) = I_0$, es decir, sin la condición de borde nula. ¿Encuentra diferencias?

8. Las expresiones (9.16), (9.33) y (9.38) de J3 corresponden a los primeros términos en la expansión del potencial vector $\mathbf{A}$ más allá de la dimensión típica de la fuente a. Muestre que los tres términos involucrados corresponden a la base armónica de la expresión general

$$\mathbf{A} \simeq \left[\frac{\dot{\mathbf{p}}}{cr} + \frac{\ddot{\mathbf{Q}} \cdot \hat{\mathbf{n}}}{6c^2 r} + \frac{\dot{\mathbf{m}} \times \hat{\mathbf{n}}}{cr}\right]_{t-r/c} \tag{1}$$

   donde $\mathbf{p}$, $\mathbf{m}$, $\mathbf{Q}$ corresponden a los momentos dipolar eléctrico, dipolar magnético y cuadrupolar eléctrico, respectivamente.

9. Una partícula cargada efectúa un movimiento circular uniforme con frecuencia ω. Obtener

   a) Los campos $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$ a partir de la expansión general dada en el punto anterior. Efectúe estos mismos cálculos considerando el movimiento de la partícula como suma de movimientos armónicos.

   b) El valor medio temporal de la distribución de potencia y la intensidad total irradiada por ciclo.

   c) La polarización del campo irradiado en la dirección del plano de giro de la partícula, y en su dirección perpendicular.

10. Una esfera de radio a con magnetización uniforme $\mathbf{M}$ rota con velocidad angular constante alrededor de un eje que pasa por el centro de la esfera y forma un ángulo α con $\mathbf{M}$. Calcule $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$, la distribución angular de potencia y la intensidad total irradiada por período.

11. Dos dipolos eléctricos paralelos están separados una distancia d. Por el primer dipolo circula una corriente $I_1 = I_0 e^{-i\omega t}$. La corriente en el segundo dipolo es $I_2 = I_1 e^{i\alpha}$, siendo α un desfasaje constante. Obtenga el vector de Poynting de este sistema radiante. Realice un diagrama de radiación para $\alpha = 0$ y $\alpha = \pi$.

12. Dos cargas q_1 y q_2, separadas una distancia d, realizan una trayectoria circular en el plano $xy\,(z = 0)$ con frecuencia ω ($d \ll c/\omega$). Calcular la distribución de potencia y la potencia total irradiada cuando $q_1 = -q_2$ y $q_1 = q_2$. ¿Cual es el orden multipolar no nulo más bajo posible en cada caso? Justifique.

13. Se tiene un conductor recto y delgado de longitud L alimentado por una fuente de frecuencia ω localizada en su centro. Suponga que la distribución estacionaria de corriente en el conductor es $I(z) = I_0 \operatorname{sen}[k(L/2 - |z|)]\, e^{-i\omega t}$. Se desprecia la resistencia. Calcular la potencia irradiada por unidad de ángulo sólido y la potencia total irradiada. Determinar en qué dirección es máxima la radiación, y cómo es la polarización de la radiación en esa dirección.

14. Resuelva el problema anterior pero en el caso de tener una espira circular de radio a con corriente $I = I_0 \operatorname{sen}(\omega t)$.

15. El radio de un anillo circular es una función del tiempo $a(t) = r_0 \cos^2 \omega t$. En todo momento $\dot{a}/c \ll 1$. El anillo tiene carga q distribuida uniformemente.

    a) Calcular los campos de radiación $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$, indicando separadamente las contribuciones de los términos dipolar eléctrico, dipolar magnético y cuadrupolar eléctrico.

    b) Graficar cualitativamente $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$ sobre la superficie de una esfera.

    c) Calcular la potencia media emitida por unidad de ángulo sólido. Graficar cualitativamente en función de la dirección.

    d) Calcular la potencia media total emitida en todas direcciones.

16. Una partícula no relativista de carga ze, masa m y energía cinética E choca con un campo de fuerzas fijo y central. La interacción es repulsiva y está descrita por un potencial $V(r)$ el cual es mayor que E a distancias cortas.

    a) Mostrar que la energía total irradiada está dada aproximadamente por

    $$\Delta W = \frac{4}{3}\frac{z^2 e^2}{m^2 c^3}\sqrt{\frac{m}{2}} \int_{r_{\min}}^{\infty} \left|\frac{dV}{dr}\right|^2 \frac{dr}{\sqrt{V(r_{\min}) - V(r)}},$$

    donde $r_{\min}$ es la distancia de máximo acercamiento en el choque.

    b) Mostrar que para una interacción coulombiana $V(r) = zZe^2/r$ la energía total irradiada es

    $$\Delta W = \frac{8}{45}\frac{zmv_0^5}{Zc^3}$$

donde v_0 es la velocidad de la carga en el infinito.

17. Una partícula de carga $-e$ y masa m gira alrededor de otra mucho más pesada de carga Q. El radio de la órbita circular es inicialmente R.

    a) Estimar el tiempo que tarda la partícula en caer al centro de la órbita debido a la pérdida de energía por radiación.

    b) Calcular el número de vueltas que realiza antes de caer.