Partículas relativistas radiantes.

1. Una partícula relativista con carga q sigue una trayectoria $\vec{r}'(t)$ con velocidad $\dot{\vec{r}}'(t) < c$. Un observador recibe las emisiones de la partícula desde posición $\vec{r}$, en un tiempo retardado $t_{\rm ret}$. A partir de dos instantes retardados cualquiera, t_1 y t_2, muestre que la expresión $t_{\rm ret} = t - |\vec{r} - \vec{r}'(t_{\rm ret})|/c$ tiene una única solución.

2. Considere las siguientes expresiones intermedias encontradas en clase para los campos de Liénard-Wiechert

$$\vec{E} = q\Big\{\frac{\hat{n}}{K\,R^2} + \frac{1}{cK}\frac{d}{dt'}[\frac{\hat{n}-\vec{\beta}}{K\,R}]\Big\}_{\rm ret} \qquad \vec{B} = q\Big\{\frac{\vec{\beta}\times\hat{n}}{K\,R^2} + \frac{1}{cK}\frac{d}{dt'}[\frac{\vec{\beta}\times\hat{n}}{K\,R}]\Big\}_{\rm ret} .$$

(a) Demostrar que

$$\frac{1}{c}\frac{d\hat{n}}{dt'} = \frac{\hat{n}\times(\hat{n}\times\vec{\beta})}{R} .$$

(b) emplear el resultado (a) para demostrar que las expresiones intermedias se pueden re-escribir como

$$\vec{E} = q\Big\{\frac{\hat{n}}{K^2\,R^2} + \frac{\hat{n}}{cK}\frac{d}{dt'}(\frac{1}{K\,R}) - \frac{\vec{\beta}}{K^2\,R^2} - \frac{1}{cK}\frac{d}{dt'}(\frac{\vec{\beta}}{K\,R})\Big\}_{\rm ret} ,$$
$$\vec{B}(\vec{x},t) = \hat{n}_{\rm ret}\times\vec{E}(\vec{x},t) .$$

(c) demostrar que

$$\frac{d}{dt'}(\hat{n}\cdot\vec{\beta}) = \frac{c}{R}[(\hat{n}\cdot\vec{\beta})^2 - \beta^2] + \hat{n}\cdot\dot{\vec{\beta}} ,$$
$$\frac{d}{dt'}(K\,R) = c[\beta^2 - \hat{n}\cdot\vec{\beta} - \frac{R}{c}\hat{n}\cdot\dot{\vec{\beta}}] ,$$
$$\frac{d}{dt'}(\frac{1}{K\,R}) = -\frac{c}{K^2\,R^2}[\beta^2 - \hat{n}\cdot\vec{\beta} - \frac{R}{c}\hat{n}\cdot\dot{\vec{\beta}}] .$$

(d) usando resultados de (c), reescribir el campo $\vec{E}$ de (b) en la forma

$$\vec{E}(\vec{x},t) = q\Big\{\frac{(\hat{n}-\vec{\beta})(1-\beta^2)}{K^3\,R^2}\Big\}_{\rm ret} + \frac{q}{c}\Big\{\frac{\hat{n}}{K^3\,R}\times[(\hat{n}-\vec{\beta})\times\dot{\vec{\beta}}]\Big\}_{\rm ret} .$$

3. El resultado del problema 2(d) exhibe dos términos: uno debido exclusivamente a la velocidad de la partícula en movimiento $\vec{E}_{\rm v}$ y otro que involucra a su aceleración $\vec{E}_{\rm a}$. La dirección del campo $\vec{E}_{\rm v}$ viene dada por la dirección $[\vec{R} - \vec{\beta}R]_{\rm ret}$. Muestre que esta dirección apunta al observador desde la posición que *hubiera* tenido la carga de mantener la misma velocidad desde el tiempo $t = t_{\rm ret}$ hasta el presente.

4. (a) A partir de los campos retardados de Jefimenko-Schott obtenidos en el problema 5 de la guía 3, obtenga las expresiones (6.60) y (6.61) de J3, es decir los campos de Heaviside para una partícula cargada.

(b) demuestre que los campos de Heaviside del punto (a) se pueden reescribir en la forma dada por las ecuaciones (28.3) y (28.4) de FLSI, el volumen 1 de "The Feynman Lectures on Physics"
`http://www.feynmanlectures.caltech.edu/I_28.html`.

(c) ¿La ec. (28.5) de FLSI es la expresión correcta y completa para la radiación, aún incluyendo efectos relativistas? Justifique.

5. Determinar la distribución angular de potencia irradiada (en campo lejano) por una partícula cargada que realiza

   (a) un movimiento rectilíneo con velocidad arbitraria.

   (b) un movimiento oscilatorio $r(t) = a\,\cos\omega t$.

   En ambos casos, analice los casos $\beta \ll 1$ y $\beta \sim 1$.

6. Obtenga la potencia total irradiada en campo lejano debida a una carga q. Para ello integre $dP/d\Omega$ sobre una esfera de manera que

$$P = \int_{\mathcal{A}} \vec{S}.(1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta})\, d\mathcal{A} \tag{1}$$

   ayuda: calcule primero las integrales

$$I = \int \frac{d\Omega}{(1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta})^3} = \frac{4\pi}{(1 - \beta^2)^2} \tag{2}$$

$$J_i = \int \frac{n_i d\Omega}{(1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta})^4} = \frac{1}{3} \frac{\partial I}{\partial \beta_i} \tag{3}$$

$$K_{ij} \int \frac{n_i n_j d\Omega}{(1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta})^5} = \frac{1}{4} \frac{\partial J_i}{\partial \beta_j} \tag{4}$$

7. Obtenga el momento total irradiada en campo lejano debida a una carga q. Para ello integre $d\vec{P}/d\Omega$ sobre una esfera de manera que

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = -\int_{\mathcal{A}} \vec{T}.(1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta})\, d\mathcal{A} = \frac{\beta}{c} P \tag{5}$$

   donde $T_{ij} = E_i E_j + B_i B_j - \dfrac{1}{2}\delta_{ij}(E^2 + B^2)$.
   ayuda: calcule primero la integral

$$M = \int \frac{d\Omega}{(1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta})^2} = \frac{4\pi}{1 - \beta^2} \tag{6}$$

8. Analice nuevamente el problema (12) de la guía 3. Es decir, considere dos cargas iguales $+q$, separadas una distancia d realizando un movimiento circular en el plano $xy\,(z = 0)$ con frecuencia ω ($d \ll c/\omega$). Pero ahora tenga en cuenta los efectos relativistas al orden más bajo posible (sin despreciarlos completamente). Calcular la distribución de potencia y la potencia total irradiada. ¿A qué orden multipolar es asimilable?

9. Se tiene N cargas q idénticas y equi-espaciadas que siguen una trayectoria circular con velocidad uniforme v. Evalúe el campo eléctrico de Liénard-Wiechert en un punto arbitrario del eje de simetría del círculo. Compruebe que este campo es puramente estático.

10. Considere el problema (16) de la guía 3 en forma relativista. Ahora, una partícula relativista de carga q y masa m que se mueve sobre el eje $\hat{x}$ incide sobre una partícula de carga Q fija en el origen. Las dos cargas tienen el mismo signo. Inicialmente, en $x \to \infty$ y $t \to -\infty$, la partícula de masa m está caracterizada por un factor relativista γ_0.

    (a) Demuestre primero que para una partícula de masa m y y carga q vale

    $$m\,\gamma(\vec{v})\,\dot{\vec{v}} = q[\vec{E} + \vec{\beta} \times \vec{B} - (\vec{\beta} \cdot \vec{E})\,\vec{\beta}] \tag{7}$$

    (b) Encuentre x como función de γ. ¿Cuál es la distancia de mínimo acercamiento?

    (c) Encuentre $\dot{v}$ como función de γ.

    (d) Encuentre $\dot{\gamma}$ como función de γ.

    (e) Escriba la potencia radiada como función de γ.

    (f) Escriba la energía total radiada como una integral,

    $$\Delta W = \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} d\gamma\, f(\gamma) \tag{8}$$

    dando los valores de γ_1 y γ_2 y la función f en términos de los datos del problema.

11. Una partícula relativista de carga q y masa m pasa a través de un capacitor de placas paralelas de longitud l. El campo $\vec{E}$ en el interior del capacitor es homogéneo y constante. La partícula ingresa al capacitor con una velocidad v_0 perpendicular a $\vec{E}$ y paralela a las placas, y viaja tan rápido que su desviación puede despreciarse.

    (a) Calcule la energía total irradiada durante el paso de la partícula por el capacitor.

    (b) Escriba la expresión del campo eléctrico de radiación y grafíquelo cualitativamente en función del tiempo para los puntos $-x_0$ y x_0, que se encuentran sobre la línea que sigue la partícula, simétricos respecto del centro del capacitor y muy alejados de éste. Tenga especial cuidado en el cálculo de los intervalos temporales en que ese campo es distinto de cero.

12. Un electrón se mueve en la dirección $\vec{v} = v\,\hat{z}$ tal que v puede considerarse relativista.

    (a) Se coloca una red de difracción metálica paralela (y rasante) al electrón. La misma está fomada por tiras de metal de ancho L. Jusitifique por qué las cargas en las tiras metálicas sucesivas pueden generar radiación.

    (b) Muestre que para un observador ubicado en ángulo θ respecto de $\hat{z}$, la radiación recibida presenta interferencia constructiva para longitudes de onda $\lambda_n = (c/v - \cos\theta)L/n$, siendo n un entero positivo (radiación Smith-Purcell).

    (c) En lugar de una red de difracción, se coloca un arreglo periódico de imanes permanentes ....NSNSNSNSN.... cada uno de ancho L. Explique qué efecto tiene esto sobre la velocidad *promedio* del electrón. Muestre que es posible generar un patrón de radiación similar al del punto anterior (radiación ondulatoria).

13. Mostrar que el m-ésimo armónico irradiado por para una carga q con movimiento armónico simple, tiene una potencia media por unidad de ángulo sólido

$$\left\langle \frac{dP}{d\Omega} \right\rangle = \frac{q^2 c \beta^2}{2\pi a^2} m^2 \tan^2\theta \, J_m^2(m\beta\cos\theta) \tag{9}$$

    Analice el límite no relativista de esta expresión.

14. Mostrar que el espectro de potencia de la radiación sincrotrón puede escribirse

$$P(E,\omega) \sim \left(\frac{\omega}{E^2}\right)^{1/3} f\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right) \tag{10}$$

    donde $f(x)$ es una función de corte (cutoff) que vale $f(0) = 1$ y $f(x \gg 1) \to 0$, como por ejemplo $f \simeq \exp(-2\omega/\omega_c)$ y

$$\omega_c = \frac{3\,qB}{mc}\left(\frac{E}{mc^2}\right)^2 \cos\theta \tag{11}$$

15. Considere la misma configuración que en el problema 5, pero ahora las N cargas q tienen posiciones angulares $\varphi_i = \omega_0(t - t_0) + \theta_i$ con $i = 1...N$.

    (a) Muestre que el espectro de potencia satisface

$$\left.\frac{dP_m}{d\Omega}\right|_N = \left|\sum_{j=1}^{N} \exp(-im\theta_j)\right|^2 \left.\frac{dP_m}{d\Omega}\right|_1 \tag{12}$$

    (b) A partir de la expresión anterior, deduzca que si las cargas están equi-espaciadas a lo largo del círculo, entonces el sistema radía en las frecuencias $kN\omega_0$ (donde k es un entero positivo).

    (c) Muestre que $dP_m/d\Omega|_N \sim N$ si las cargas se distribuyen aleatoriamente a lo largo del círculo.