FÍSICA TEÓRICA 1 – 2do. cuatrimestre de 2018
Comentarios clase práctica del 7/11- Guía 6 - Onda incidente en un buen conductor

El miércoles 7/11 hicimos parte del problema 7 de la guía 6; **reflexión y transmisión en un buen conductor**. Resolvimos los ítems (a), (b) y mencionamos rápidamente cómo llegar a los resultados para (c) y (d). Al final estudiamos el balance de energía dentro del conductor. En estas notas repaso (a) y (b), hago mayor énfasis en los ítems (c) y (d), y corrijo un factor $\sqrt{2}$ que no puse en un coeficiente de transmisión que escribí en el pizarrón.

(a) Las ecuaciones de Maxwell dentro de un conductor óhmico donde $\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}$ y con $\mu' = \epsilon' = 1$ son

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \mathbf{0}\,, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = \mathbf{0}$$
$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\,, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi\sigma}{c}\mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\,. \tag{1}$$

Reemplazando en las dos primeras las soluciones de ondas planas

$$\mathbf{E} = E\, e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}\, \hat{e}_1\,, \quad \mathbf{B} = B\, e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}\, \hat{e}_2\,,$$

se tiene que $\mathbf{k}\cdot\mathbf{E} = \mathbf{k}\cdot\mathbf{B} = 0$, mientras que de las otras dos se obtiene

$$\mathbf{k} \times \mathbf{E} = \frac{\omega}{c}\mathbf{B}\,, \quad \mathbf{k} \times \mathbf{B} = -\frac{\omega}{c}\left(1 + i\frac{4\pi\sigma}{\omega}\right)\mathbf{E}\,.$$

Tomando $\mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{E})$ y usando la última para deshacerse de $\mathbf{B}$, llegamos a que el producto escalar del vector de onda consigo mismo es

$$\mathbf{k}\cdot\mathbf{k} = k^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \left[1 + 2i\left(\frac{c}{\omega\delta}\right)^2\right]\,, \tag{2}$$

y la longitud de penetración en el conductor quedó definida como

$$\delta = \frac{c}{\sqrt{2\pi\sigma\omega}}\,. \tag{3}$$

La definición de buen conductor es $\delta \ll \lambda_0 = c/\omega$ o, como indica el enunciado, consider $\sigma \gg \omega$ para despreciar el término de corrientes de desplazamiento en las ecuaciones de Maxwell. La aproximación corresponde a prescindir del término real en la ecuación (2), es decir $k^2 \approx 2i/\delta^2$, tal que la relación de dispersión para un buen conductor queda

$$k(\omega) = \frac{1+i}{\delta}. \tag{4}$$

El índice de refracción puede leerse de la definición $k(\omega) = n'\frac{\omega}{c}$. Para el caso de un buen conductor

$$n' = \frac{c}{\omega\delta}(1+i)\,. \tag{5}$$

(b) El conductor se ubica en el espacio semi infinito con $z < 0$, la incidente se propaga desde los $z > 0$, en vacío, con número de onda $k_0 = w/c$ y ángulo de incidencia θ. Planteamos el problema con el caso TE como en clase. Los campos incidente, reflejado y transmitido son

$$\mathbf{E}_0 = E_0\, e^{i(\mathbf{k}_0\cdot\mathbf{r}-\omega t)}\,\hat{x}\,, \quad \mathbf{E}_r = E_r\, e^{i(\mathbf{k}_r\cdot\mathbf{r}-\omega t)}\,\hat{x}\,, \quad \mathbf{E} = E\, e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}\,\hat{x}\,,$$

en donde los vectores de onda quedan definidos por

$$\mathbf{k}_0 = k_{0y}\,\hat{y} + k_{0z}\,\hat{z}\,, \quad \mathbf{k}_r = k_{ry}\,\hat{y} + k_{rz}\,\hat{z}\,, \quad \mathbf{k} = k_y\,\hat{y} + k_z\,\hat{z}\,. \tag{6}$$

La ley de Snell establece $k_0 \sin\theta = k_{0y} = k_{ry} = k_y = k\sin\theta'$. El $\sin\theta'$ queda definido en función de θ, k_0 y k. La componente z de la onda transmitida será compleja para poder satisfacer la relación de dispersión de k en el conductor. Escribimos esa componente como

$$k_z = k' + ik''\,,$$

de modo que al hacer el producto escalar de $\mathbf{k}$ consigo mismo tenemos

$$\mathbf{k}\cdot\mathbf{k} = (k_0\sin\theta)^2 + k'^2 - k''^2 + 2ik'k''\,. \tag{7}$$

Igualando las partes reales e imaginarias de la expresión anterior con (2), y luego de resolver una cuártica (usando, por ejemplo, el Mathematica), se obtiene que

$$\begin{array}{l} k' = -\frac{1}{\delta}\sqrt{(1+\beta^2)^{1/2}+\beta} \approx -\delta^{-1} \\ k'' = -\frac{1}{\delta}\sqrt{(1+\beta^2)^{1/2}-\beta} \approx -\delta^{-1} \end{array} \;,\; \beta = \frac{\delta^2 k_0^2\cos^2\theta}{2} \ll 1 \text{ (para el buen conductor)}\,. \tag{8}$$

Esta solución de (7) satisface las condiciones de contorno para el campo transmitido en el conductor

$$\mathbf{E} = E\, e^{-z\,k''} e^{i(y\,k_o\sin\theta + z\,k' - \omega t)}\,\hat{x}\,;$$

$k' \approx -\delta^{-1} < 0$ es la parte real de la componente k_z y determina que la propagación en esa dirección sea en sentido de $-\hat{z}$, y $k'' \approx -\delta^{-1}$ produce una atenuación del campo hacia los z negativos en un longitud característica δ. Las superficies de amplitud constante son los planos $zk'' = cte.$, las superficies de fase constante son los planos $y\,k_o\sin\theta + z\,k' = cte.$. Los planos de amplitud constante son paralelos a la interfase. La dirección de propagación es perpendicular a los planos de fase constante y el ángulo de refracción *real* ψ de la onda transmitida respecto a la normal a la interfase $\hat{\perp} = -\hat{z}$, puede definirse a partir de

$$\sin\psi = \frac{k_y}{(k_y^2 + k'^2)^{1/2}} \approx \delta k_0 \sin\theta\,.$$

A mayor conductividad o menor frecuencia el ángulo $\psi \to 0$ y la propagación en el conductor queda en la dirección normal a la superficie. Para un metal como el cobre $\sigma \simeq 5\times10^{17}s^{-1}$, a una frecuencia baja de 60Hz se tiene un espesor pelicular $\delta \simeq 1cm$ y $\psi \simeq (10^{-7})^{\text{o}}$. Para materiales no metálicos con menor conductividad, el ángulo ψ también puede ser aproximadamente cero; en agua $\sigma \simeq 5\times10^{10}s^{-1}$, y a una frecuencia de 100kHz se obtiene $\delta_{agua}^{100kHz} \simeq 70cm$ y $\psi_{agua}^{100MHz} \simeq 0,1^{\text{o}}$.

(c) (consideramos sólo el caso TE.)
De la continuidad de las componentes tangenciales en la interfase vacío–buen conductor de los campos eléctrico y magnético (con permeabilidades $\mu = 1$ en todo el espacio) se tiene el sistema

$$E_0 + E_r = E\,, \qquad k_{0z}\, E_0 + k_{rz}\, E_r = k_z\, E.$$

Reemplazando $k_{rz} = -k_{0z}$, se puede escribir los coeficientes de reflexión y transmisión en término de las componentes de los números de onda como

$$R = \frac{E_r}{E_0} = \frac{k_{0z} - k_z}{k_{0z} + k_z}\,, \quad T = \frac{E}{E_0} = \frac{2k_{0z}}{k_{0z} + k_z}\,. \tag{9}$$

$- - -$

Hacemos un pausa aquí para hacer el ejercicio de llegar a estas expresiones partiendo de la forma tradicional de escribir los coeficientes de Fresnel de reflexión y transmisión para incidencia TE en un ángulo θ. Estos suelen expresarse como

$$R_{Fresnel} = \frac{(n/\mu)\cos\theta - (n'/\mu')\cos\theta'}{(n/\mu)\cos\theta + (n'/\mu')\cos\theta'}\,, \quad T_{Fresnel} = \frac{2(n/\mu)\cos\theta}{(n/\mu)\cos\theta + (n'/\mu')\cos\theta'}$$

Los parámetros sin primar corresponden al semiespacio vacío desde donde incide la onda plana, y los primados al conductor. Reemplazado $\mu = \mu' = 1$ y $n' = \frac{k}{\omega/c}$ llegamos a la expresión de R (y de T) como la escribimos en clase

$$R = \frac{k_0\cos\theta - k\cos\theta'}{k_0\cos\theta + k\cos\theta'}\,, \quad T = \frac{2k_0\cos\theta}{k_0\cos\theta + k\cos\theta'} \tag{10}$$

Los cosenos de los ángulos incidente y transmitido, como se usan en los coeficientes de Fresnel, están definidos a partir de la normal a la interfase $\hat{\perp}$ que apunta desde el medio de incidencia hacia el refractado mediante el producto escalar

$$\mathbf{k_0}\cdot\hat{\perp} \equiv k_0\cos\theta \doteq k_{0\perp}\;\;(= -k_{0z})\,, \qquad \mathbf{k}\cdot\hat{\perp} \equiv k\cos\theta' \doteq k_{\perp}\;\;(= -k_z)\,.$$

Reemplazando esto último en (10), los coeficientes quedan escritos como en (9) sin nombrar los ángulos

$$R = \frac{k_{0\perp} - k_{\perp}}{k_{0\perp} + k_{\perp}}\,, \quad T = \frac{2k_{0\perp}}{k_{0\perp} + k_{\perp}}\,.$$

$- - -$

Volviendo a la interfase vacío–buen conductor del problema, usando $k_{0z} = -k_0\cos\theta$ y $k_z \approx -(1+i)/\delta$ se obtiene

$$R \approx -1 + (1-i)\delta k_0\cos\theta\,, \tag{11}$$

donde se retuvieron términos a primer orden en $\delta k_0 \sim (\omega/\sigma)^{1/2} \gg (\omega/\sigma)$. Análogamente, el coeficiente de transmisión queda

$$T \approx (1-i)\delta k_0\cos\theta\,. \tag{12}$$

Las amplitudes reflejada y transmitida son casi independientes del ángulo de incidencia en la mayoría de los metales a frecuencias menores al THz. En un conductor ideal, $\delta \to 0$, no hay onda transmitida.

(d) El coeficiente de intensidad reflejada r se define como el cociente entre la energía de la onda reflejada y la incidente,

$$r = \frac{\mathbf{E_r} \cdot \mathbf{E_r^*}}{\mathbf{E_0} \cdot \mathbf{E_0^*}} = \frac{E_r E_r^*}{E_0 E_0^*} = RR^* = |R|^2 \approx 1 - 2\delta k_0 \cos\theta \,. \tag{13}$$

Para incidencia normal se obtiene el resultado que pide el ítem (d) del problema 7.

Errata de la clase del 07/11:
En clase, además, estudiamos el balance de energía dentro del conductor. Para eso usamos el módulo del coeficiente de transmisión (12),

$$|T| \approx |(1-i)\delta k_0 \cos\theta| = \sqrt{2}\,\delta k_0 \cos\theta \,,$$

con incidencia normal: $|T| \approx \sqrt{2}\delta k_0$. En el pizarrón olvidé el factor $\sqrt{2}$. El coeficiente $|T|^2 = t$ aparece tanto en el cálculo del vector de Poynting como el de la energía disipada por efecto Joule dentro del conductor, por lo que el balance que chequeamos en clase no se modifica. Sólo hay un factor $2 = (\sqrt{2})^2$ faltante en todas partes. Si llegaron hasta acá aprovechen el envión y repasen las cuentas que hicimos del balance de energía!