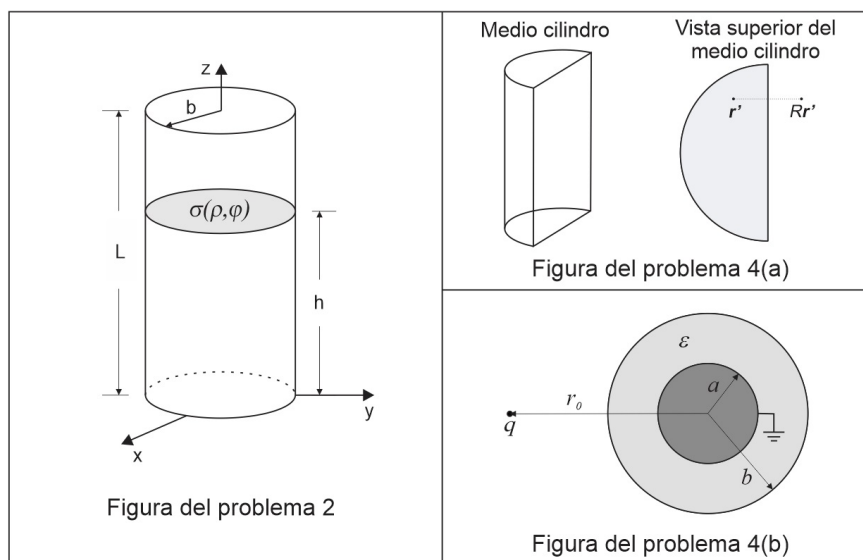


Por favor: resolver cada problema en hojas separadas e indicar el nombre en todas ellas.

- 1 (3 puntos) Utilizar el método de separación de variables para hallar el potencial en todo el espacio producido por un cuadrado cargado con densidad uniforme σ (el cuadrado está sobre el plano xy , su centro coincide con el origen y sus lados están alineados con los ejes x e y). Evaluar el potencial sobre el eje z para puntos muy cercanos al cuadrado e interpretar el resultado.
- 2 (3 puntos) En el interior del cilindro conductor conectado a tierra de la figura (radio b , longitud L) se tiene una densidad de carga superficial sobre $z = h$ dada por $\sigma(\rho, \varphi) = \lambda \delta(\rho - a) + \frac{q}{2\pi\rho} \delta(\rho)$, siendo $a < b$, λ y q constantes positivas.
 - (a) Describir qué representa la distribución de carga dada por $\sigma(\rho, \varphi)$.
 - (b) ¿Cuánto vale el potencial fuera del cilindro?
 - (c) Hallar el potencial en el interior del cilindro.
- 3 (2 puntos) Se tiene un imán esférico de radio a con magnetización no uniforme dada por $\mathbf{M}(r, \varphi, \theta) = -rf(\varphi) \sin\theta \hat{e}_\varphi$, donde $f(\varphi)$ es cierta función.
 - (a) Demostrar que el campo magnético de dicho imán puede escribirse como el gradiente de un potencial $\Phi_H(\mathbf{r})$.
 - (b) ¿Puede aparecer un término proporcional a $1/r$ en la expansión de $\Phi_H(\mathbf{r})$ para r grande?
 - (c) Probar que $\Phi_H(\mathbf{r})$ se anula sobre el eje z . Ayuda: ¿Qué propiedad tiene $f(\varphi)$?
- 4 (2 puntos) Decida si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa. Justifique su respuesta.
 - (a) Si $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ es la función de Green (Dirichlet) para el problema interior de un cilindro, entonces, la función de Green (Dirichlet) para el problema interior de medio cilindro es $G_{1/2}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - G(\mathbf{r}, R\mathbf{r}')$, siendo $R\mathbf{r}'$ el punto $\mathbf{r}'$ reflejado con respecto a la cara plana del medio cilindro.
 - (b) Una esfera conductora de radio a está a tierra, entre $r = a$ y $r = b$ hay un dieléctrico de permitividad ε , y ubicada a una distancia r_0 del centro de la esfera hay una carga q ($a < b < r_0$). En dicha situación, la carga total inducida sobre la superficie $r = b$ del dieléctrico es entonces $Q_{ind.} = -\frac{q}{\varepsilon} \left[\frac{a}{r_0} + (\varepsilon - 1) \frac{r_0}{b} \right]$.



Algunas relaciones que pueden ser útiles (o no...)

- Algunas funciones especiales:

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos \theta) e^{im\varphi} \text{ (armónicos esféricos).}$$

$$P_l^m(x) = \frac{(-1)^m}{2^l l!} (1-x^2)^{m/2} \frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}} (x^2-1)^l \text{ (polinomios asociados de Legendre).}$$

$$P_l(x) \doteq P_l^0(x) \text{ (polinomios de Legendre).}$$

$$J_\nu(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j! \Gamma(j+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^j \text{ (función de Bessel de orden } \nu \text{ del primer tipo).}$$

- Algunas relaciones de ortogonalidad:

$$\int_0^{2\pi} d\varphi e^{im\varphi} e^{-im'\varphi} = 2\pi \delta_{m,m'} \text{ (m, m' enteros).}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{ikx} e^{-ik'x} = 2\pi \delta(k-k') \text{ (k, k' reales).}$$

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \sin\theta Y_{l'm'}(\theta, \varphi) Y_{lm}^*(\theta, \varphi) = \delta_{l,l'} \delta_{m,m'}.$$

$$\int_{-1}^1 dx P_{l'}^m(x) P_l^m(x) = \frac{2}{2l+1} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \delta_{l,l'}.$$

$$\int_{-1}^1 dx P_{l'}(x) P_l(x) = \frac{2}{2l+1} \delta_{l,l'}.$$

$$\int_0^a d\rho \rho J_\nu\left(\frac{x_{\nu n}}{a}\rho\right) J_\nu\left(\frac{x_{\nu n'}}{a}\rho\right) = \delta_{n,n'} \frac{a^2 J_{|\nu|+1}^2(x_{\nu n})}{2} \text{ (} x_{\nu n} \text{ es la raíz n-ésima de } J_\nu \text{).}$$

$$\int_0^{+\infty} d\rho \rho J_\nu(k\rho) J_\nu(k'\rho) = \frac{1}{k} \delta(k-k') \text{ (k, k' reales).}$$

- Misceláneas:

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin\theta} \partial_\theta (\sin\theta A_\theta) + \frac{1}{r \sin\theta} \partial_\varphi A_\varphi \text{ (divergencia de } \mathbf{A} \text{ en coordenadas esféricas).}$$

$$I'_\nu(x) K_\nu(x) - I_\nu(x) K'_\nu(x) = \frac{1}{x}.$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{\sin x}{x} = \pi.$$