Por favor: resolver cada problema en hojas separadas e indicar el nombre en todas ellas.

1 *(3 puntos)* Utilizar el método de separación de variables para hallar el potencial en todo el espacio producido por un cuadrado cargado con densidad uniforme σ (el cuadrado está sobre el plano xy, su centro coincide con el origen y sus lados están alineados con los ejes x e y). Evaluar el potencial sobre el eje z para puntos muy cercanos al cuadrado e interpretar el resultado.

Vamos a dividir el espacio en dos regiones donde valga la ecuación de Laplace, utilizando el plano $z = 0$. En las direcciones x e y tendremos soluciones oscilatorias $e^{ik_x x}$ y $e^{ik_y y}$, mientras que en z las soluciones serán exponenciales reales. Para que el potencial no sea divergente en $z \to \pm\infty$ tomamos $e^{-\sqrt{k_x^2+k_y^2}|z|}$ como la solución para la parte en z. Así, el potencial toma la forma

$$\Phi(\mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{+\infty} dk_x \int_{-\infty}^{+\infty} dk_y \, A(k_x, k_y) e^{ik_x x + ik_y y} e^{-\sqrt{k_x^2+k_y^2}|z|} \, .$$

Ahora hay que usar la condición sobre el salto del campo eléctrico plano $z = 0$

$$\left.\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right|_{z=0^-} - \left.\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right|_{z=0^+} = 4\pi\sigma(x, y) \, .$$

Para despejar $A(k_x, k_y)$ de la ecuación anterior lo que debemos hacer es escribir $\sigma(x, y)$ en serie de Fourier en x e y (de la forma en la que está escrito Φ). Es decir, buscamos $\sigma(k_x, k_y)$ tal que

$$\sigma(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} dk_x \int_{-\infty}^{+\infty} dk_y \, \sigma(k_x, k_y) e^{ik_x x + ik_y y} \, .$$

Insertando esta expresión en la ecuación para el salto del campo, podemos despejar $A(k_x, k_y)$ en términos de $\sigma(k_x, k_y)$

$$A(k_x, k_y) = \frac{2\pi\sigma(k_x, k_y)}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2}} \, .$$

Sólo resta hallar $\sigma(k_x, k_y)$. Esto puede hacerse utilizando las relaciones de ortogonalidad para las exponenciales o transformando Fourier. Se obtiene

$$\sigma(k_x, k_y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dy \, \sigma(x, y) e^{-ik_x x - ik_y y} \, .$$

En nuestro caso, $\sigma(x, y) = \sigma$ (constante) en $-\frac{a}{2} < x, y < \frac{a}{2}$ (donde llamamos a al lado del cuadrado) y se anula en el resto del espacio. Esto nos permite evaluar las integrales anteriores y obtener

$$\sigma(k_x, k_y) = \frac{\sigma}{\pi^2 k_x k_y} \text{sen}\left(\frac{k_x a}{2}\right) \text{sen}\left(\frac{k_y a}{2}\right) \, .$$

Finalmente

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{2\sigma}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_x \int_{-\infty}^{+\infty} dk_y \, \frac{1}{k_x k_y \sqrt{k_x^2 + k_y^2}} \text{sen}\left(\frac{k_x a}{2}\right) \text{sen}\left(\frac{k_y a}{2}\right) e^{ik_x x + ik_y y} e^{-\sqrt{k_x^2+k_y^2}|z|} \, .$$

Por último, se pedía evaluar el potencial sobre el eje z, es decir, para $x = y = 0$, para puntos muy cercanos al cuadrado, es decir, para z pequeño. Lo que debería obtenerse en ese caso es

$\Phi(0,0,z) = -2\pi\sigma|z|$, es decir, el potencial que genera un plano infinito cuya densidad de carga es σ. Para ver este límite se puede hacer un desarrollo de Taylor para z pequeño

$$e^{-\sqrt{k_x^2+k_y^2}|z|} \approx 1 - \sqrt{k_x^2+k_y^2}|z|\,;$$

luego, en este límite, el potencial toma la forma

$$\Phi(0,0,z) \approx C - \frac{2\sigma|z|}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dk_x \int_{-\infty}^{+\infty} dk_y\, \frac{1}{k_x k_y}\text{sen}\left(\frac{k_x a}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{k_y a}{2}\right) = C - 2\pi\sigma|z|\,,$$

donde C es una constante aditiva irrelevante (viene del orden cero del desarrollo de Taylor de $e^{-\sqrt{k_x^2+k_y^2}|z|}$) y en el último paso resolvimos una integral que venía dada en la hoja de fórmulas. Así vemos que se recupera lo esperado.

2 *(3 puntos)* En el interior del cilindro conductor conectado a tierra de la figura (radio b, longitud L) se tiene una densidad de carga superficial sobre $z = h$ dada por $\sigma(\rho, \varphi) = \lambda\,\delta(\rho - a) + \frac{q}{2\pi\rho}\delta(\rho)$, siendo $a < b$, λ y q constantes positivas.

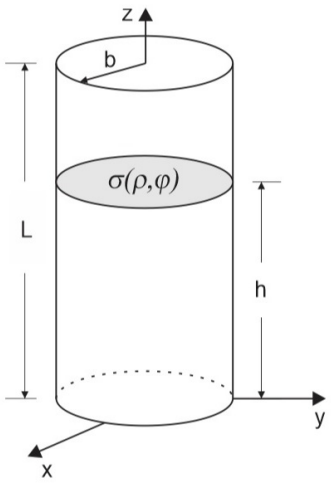

Figura del problema 2

(a) Describir qué representa la distribución de carga dada por $\sigma(\rho, \varphi)$.

Por la presencia de las deltas de Dirac, sólo habrá cargas sobre $\rho = 0$ (carga puntual) y $\rho = a$ (anillo) (ambas sobre la superficie $z = h$). Además, como no hay dependencia con el ángulo φ, la densidad de carga sobre $\rho = a$ es uniforme. Para terminar de caracterizar a la distribución tenemos que decir entonces cuál es el valor de la carga puntual y cuál es la carga total del anillo en $\rho = a$. Para ello, basta con integrar las partes correspondientes en la densidad de carga en un entorno de $\rho = 0$ y en un entorno del anillo.

Así, el valor de la carga en el origen viene dado por (ε es un número positivo pequeño)

$$\int_0^{\varepsilon} d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi \rho \frac{q}{2\pi\rho}\delta(\rho) = \int_0^{\varepsilon} d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{q}{2\pi}\delta(\rho) = q\,.$$

La carga puntual tiene entonces valor q. Por otro lado, la carga total del anillo es

$$\int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi \rho\lambda\,\delta(\rho - a) = 2\pi a\lambda\,.$$

(b) ¿Cuánto vale el potencial fuera del cilindro?

Afuera del cilindro no hay cargas, por lo tanto, el potencial satisface la ecuación de Laplace. Además, el potencial sobre el cilindro debe anularse. Una solución a ese problema es un potencial que se anule fuera del cilindro (y por unicidad, es la única solución).

(c) Hallar el potencial en el interior del cilindro.

Para hallar la solución en el interior del cilindro vamos dividir el interior del cilindro en dos regiones en cuyo interior valga la ecuación de Laplace. Para ello, cortamos el cilindro con un plano imaginario en $z = h$. Llamamos I a la región interior al cilindro comprendida entre $z = 0$ y $z = h$, y II a la región comprendida entre $z = h$ y $z = L$ (partes inferior y superior del cilindro de la Figura). En ambas regiones vale la ecuación de Laplace, por lo que propondremos soluciones por separación de variables (en coordenadas cilíndricas, por la simetría de la configuración).

Como eventualmente tendremos que plantear condiciones de contorno sobre $z = h$ asociadas a la densidad de carga ubicada sobre ese plano, buscaremos tener una base en las variables ρ y φ.
Como hay simetría azimutal, sabemos que el potencial no depende de φ, por lo que de todas las exponenciales $e^{i\nu\varphi}$ sólo aparecerá la correspondiente a $\nu = 0$ en el potencial.
Tanto la región I como la II contienen al eje $\rho = 0$, donde la función de Bessel N_0 diverge. Por este motivo, sólo nos quedaremos con la función de Bessel $J_0(k\rho)$. Como el potencial debe anularse sobre $\rho = b$ (para todo φ y z), imponemos que resulte $J_0(k\rho) = 0$, de donde sale la condición que discretiza los valores de k; en concreto, resulta $k_n = x_{0n}/b$, donde x_{0n} es el n-ésimo cero de la función J_0.
Por otro lado, para las soluciones en la dirección z tendremos exponenciales reales. Como queremos que el potencial se anule sobre las tapas nos quedará

$$\Phi(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0\left(k_n\rho\right) \sinh(k_n z_<) \sinh\left[k_n(z_> - L)\right] \,,$$

donde $z_> = \text{máx}(z, h)$ y $z_< = \text{mín}(z, h)$. La solución propuesta se anula sobre todo el cilindro y además es continua en $z = h$. Sólo resta determinar el grupo de incógnitas A_n imponiendo el salto que debe tener la componente normal del campo eléctrico en $z = h$

$$\left.\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right|_{z=h^-} - \left.\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right|_{z=h^+} = 4\pi\sigma(\rho,\varphi)\,.$$

De la ecuación anterior podemos despejar A_n si logramos escribir $\sigma(\rho, \varphi)$ como un desarrollo en funciones de Bessel similar al de Φ. Proponemos entonces

$$\sigma(\rho,\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n J_0\left(k_n\rho\right) \,.$$

Insertando esta expresión en la ecuación para el salto del campo e introduciendo las derivadas del potencial evaluadas en $z = h$ llegamos a una ecuación de la que podemos despejar A_n en términos de σ_n

$$A_n = \frac{4\pi\sigma_n}{k_n \sinh(k_n L)}\,.$$

Sólo resta entonces hallar σ_n. Para ello, podemos multiplicar la ecuación que expresa el desarrollo en funciones de Bessel de $\sigma(\rho, \varphi)$ por $\rho J_0(k_{n'}\rho)$ e integrar en ρ entre 0 y b. Luego, utilizando la siguiente relación de ortogonalidad para el caso $\nu = 0$

$$\int_0^b d\rho\,\rho\, J_\nu\left(\frac{x_{\nu n}}{b}\rho\right)\, J_\nu\left(\frac{x_{\nu n'}}{b}\rho\right) = \delta_{n,n'}\frac{b^2 J^2_{|\nu|+1}\left(x_{\nu n'}\right)}{2}\,,$$

podemos despejar

$$\sigma_n = \frac{2}{b^2 J_1^2(x_{0n})}\int_0^b d\rho\,\rho J_0\left(k_n\rho\right)\sigma(\rho,\varphi) = \frac{2}{b^2 J_1^2(x_{0n})}\left[\lambda a J_0\left(k_n a\right) + \frac{q}{2\pi}\right]\,.$$

Finalmente, el potencial queda

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{8\pi}{b^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda a J_0(k_n a) + q/2\pi}{k_n J_1^2(x_{0n})\sinh(k_n L)} J_0\left(k_n\rho\right)\sinh(k_n z_<)\sinh\left[k_n(z_> - L)\right]\,.$$

3 *(2 puntos)* Se tiene un imán esférico de radio a con magnetización no uniforme dada por $\mathbf{M}(r,\varphi,\theta) = -rf(\varphi)\operatorname{sen}\theta\,\hat{e}_\varphi$, donde $f(\varphi)$ es cierta función.

(a) Demostrar que el campo magnético de dicho imán puede escribirse como el gradiente de un potencial $\Phi_H(\mathbf{r})$.

Partimos de la ecuación de Maxwell para el campo magnético $\mathbf{B}$ en presencia de un imán

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c}\left(\mathbf{J}_{\text{libre}} + c\nabla \times \mathbf{M}\right). \tag{-4}$$

Podemos definir un campo $\mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M}$ que satisface

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_{\text{libre}}. \tag{-4}$$

En este ejercicio no tenemos corrientes libres, por lo cual el rotor de $\mathbf{H}$ se anula, permitiéndonos escribir $\mathbf{H}$ como el gradiente de una función escalar, es decir

$$\nabla \times \mathbf{H} = 0 \Rightarrow \mathbf{H} = -\nabla\Phi_H \tag{-4}$$

Además, de la definición de $\mathbf{H}$ puede verse que fuera del imán, donde $\mathbf{M} = 0$, el campo magnético $\mathbf{B}$ y $\mathbf{H}$ coinciden, de forma que también $\mathbf{B} = -\nabla\Phi_H$

(b) ¿Puede aparecer un término proporcional a $1/r$ en la expansión de $\Phi_H(\mathbf{r})$ para r grande?

Como no existen monopolos magnéticos, el desarrollo multipolar para el campo $\mathbf{B}$ empezará con términos de orden $1/r^3$ (no habrá término que vaya como $1/r^2$), entonces, para el potencial Φ_H (que fuera del imán, en particular, lejos del imán es tal que $\mathbf{B} = -\nabla\Phi_H$) no habrá término que vaya como $1/r$ (porque si lo hubiera, aparecería un término $1/r^2$ para la expansión multipolar de $\mathbf{B}$).

(c) Probar que $\Phi_H(\mathbf{r})$ se anula sobre el eje z. *Ayuda: ¿Qué propiedad tiene $f(\varphi)$?.*

El último punto nos pide demostrar que sobre el eje z el potencial se anula. Para plantear la forma que tendrá un potencial, vimos a lo largo del curso que existen múltiples métodos. Planteando por ejemplo la integral de Poisson

$$\Phi_M(\mathbf{x}) = \int d^3x' \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}. \tag{-4}$$

Identificando bien cuáles son los puntos del espacio en los que quiero observar el potencial, es decir, que forma tiene **x** y cuáles son los puntos del espacio en los que existe una densidad de carga (es decir **x'**, la integral se simplifica considerablemente.

Como quiero observar el potencial sobre el eje z, **x** debe ser

$$\mathbf{x} = (0,0,z) = (0,0,r\cos(\theta)) \tag{-4}$$

Por otro lado, los puntos donde hay distribución de carga los vamos a describir con **x'**

$$\mathbf{x}' = (x',y',z') = (r'\cos(\varphi')\operatorname{sen}(\theta'), r'\operatorname{sen}(\varphi')\operatorname{sen}(\theta'), r'\cos(\theta')) \tag{-4}$$

de forma que

$$|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| = \sqrt{r'^2\operatorname{sen}(\theta')^2 + \left(r\cos(\theta) - r'\cos(\theta')\right)^2} \tag{-4}$$

Reemplazando esta información, y la forma explícita de la densidad de *carga* en la integral de Poisson nos queda

$$\begin{aligned}\Phi_M(\mathbf{x}) &= \int_0^{\pi} \operatorname{sen}(\theta')d\theta' \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^{a} r'dr' \frac{f'(\varphi')}{\sqrt{r'^2\operatorname{sen}(\theta')^2 + \left(r\cos(\theta) - r'\cos(\theta')\right)^2}} \\ &= \int_0^{\pi} \operatorname{sen}(\theta')d\theta' \int_0^{a} r'dr' \frac{1}{\sqrt{r'^2\operatorname{sen}(\theta')^2 + \left(r\cos(\theta) - r'\cos(\theta')\right)^2}} \cdot \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi' f'(\varphi')}_{f(2\pi)-f(0)}.\end{aligned}$$

Pero $f(2\pi) = f(0)$ para que la magnetización sea univaluada, por lo tanto, el potencial se anula sobre el eje.

4 *(2 puntos)* Decida si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa. Justifique su respuesta.

(a) Si $G(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ es la función de Green (Dirichlet) para el problema interior de un cilindro, entonces, la función de Green (Dirichlet) para el problema interior de medio cilindro es $G_{1/2}(\mathbf{r},\mathbf{r}') = G(\mathbf{r},\mathbf{r}') - G(\mathbf{r},R\mathbf{r}')$, siendo $R\mathbf{r}'$ el punto $\mathbf{r}'$ reflejado con respecto a la cara plana del medio cilindro.

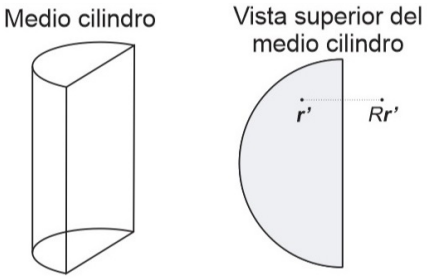

Figura del problema 4(a)

Esta afirmación es VERDADERA. Para verlo recordemos que la función de green $G_{1/2}(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ se define por las siguientes dos condiciones:

i- $\bar{\nabla}^2 G_{1/2}(\mathbf{r},\mathbf{r}') = 4\pi\delta^3(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$, en el interior del medio cilindro.

ii- $G_{1/2}(\mathbf{r},\mathbf{r}') = 0$ sobre la superficie del medio cilindro.

La primera condición se satisface debido a que el punto $R\mathbf{r}'$ se encuentra fuera del medio cilindro y entonces $\bar{\nabla}^2 G(\mathbf{r},R\mathbf{r}') = 0$, mientras que $\bar{\nabla}^2 G(\mathbf{r},\mathbf{r}') = 4\pi\delta^3(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$.

La segunda condición se satisface trivialmente sobre la cara curva del medio cilindro y sus tapas (porque estamos sumando dos funciones que se anulan sobre la cara del cilindro completo y sus tapas). Resta ver entonces que $G_{1/2}(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ también se anula sobre la cara plana del medio cilindro. Eso se puede ver sencillamente por simetrías. $G_{1/2}(\mathbf{r},\mathbf{r}') = G(\mathbf{r},\mathbf{r}') - G(\mathbf{r},R\mathbf{r}')$, es una suma del potencial generado por una carga $q=1$ ubicada en $\mathbf{r}'$ y el del potencial generado por una carga $q=-1$ ubicada en $R\mathbf{r}'$ (ambos con la condición de anularse sobre el borde del cilindro completo). El sistema de cargas tiene entonces simetría ante la operación de reflexión (respecto a la cara plana del medio cilindro) compuesta con una inversión del signo de las cargas. Esta simetría nos dice que, para puntos ubicados sobre el plano de simetría, el potencial debe anularse, lo que demuestra la segunda condición.

(b) Una esfera conductora de radio a está a tierra, entre $r=a$ y $r=b$ hay un dieléctrico de permitividad ε, y ubicada a una distancia r_0 del centro de la esfera hay una carga q ($a<b<r_0$). En dicha situación, la carga total inducida sobre la superficie $r=b$ del dieléctrico es entonces $Q_{ind.} = -\frac{q}{\varepsilon}\left[\frac{a}{r_0} + (\varepsilon-1)\frac{r_0}{b}\right]$.

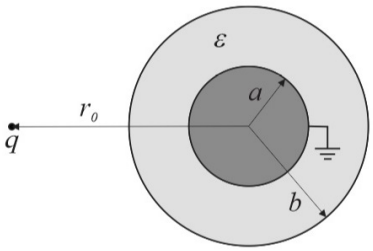

Figura del problema 4(b)

Este enunciado es FALSO. Esto puede verse analizando el resultado obtenido en el caso límite $\varepsilon = 1$. En dicho límite, el medio exterior es el vacío y por lo tanto la carga total de polarización sobre $r = b$ debería ser cero. Sin embargo, tomando el límite en la expresión del enunciado, obtenemos $Q_{ind.}^{(\varepsilon=1)} = -q\left(\frac{a}{r_0}\right) \neq 0$.