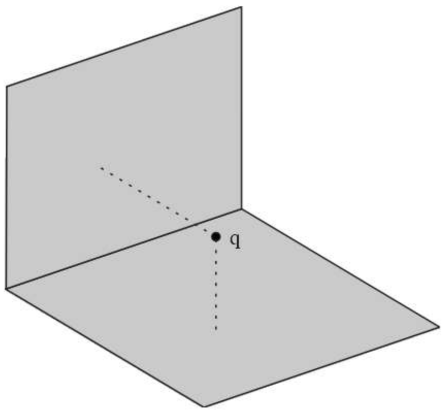
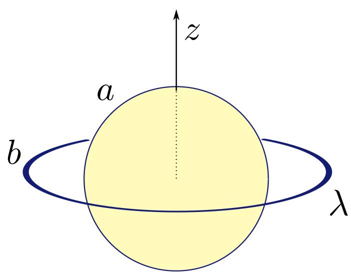
$\boxed{1}$ Una carga puntual $q$ está ubicada entre dos planos conductores semi-infinitos y perpendiculares entre sí que se encuentran conectados a tierra. Hallar el potencial electrostático en la región que contiene a la carga utilizando el método de imágenes.




$\boxed{2}$ Se tienen una esfera conductora de radio $a$ conectada a tierra y un anillo concéntrico de radio $b > a$ con carga total $Q$ distribuida uniformemente.




(a) ¿Cómo hallaría el potencial fuera de la esfera utilizando el método de imágenes? Obtener el potencial explícitamente para puntos ubicados sobre el eje del anillo y estudiar su comportamiento para puntos lejanos a la esfera.

(b) Encuentre el potencial utilizando el método de la función de Green.

(c) ¿Cómo calcularía la densidad de carga inducida sobre la esfera? ¿Qué puede decirse sobre el valor total de la carga inducida?

(d) ¿Cómo resolvería el problema si la esfera estuviera aislada y descargada?

$\boxed{3}$ Una esfera de radio $a$ está conectada a tierra. A una distancia $d > a$ de su centro hay un dipolo puntual $\mathbf{p}$.

(a) Calcular el potencial fuera de la esfera utilizando el método de imágenes.

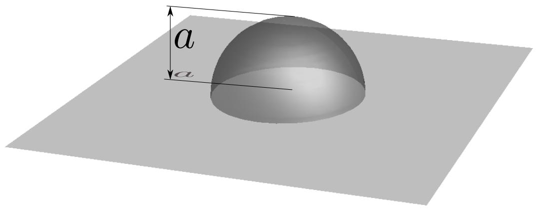
(b) Volver a resolver el apartado anterior utilizando el método de la función de Green.

(c) Calcular la densidad de carga inducida sobre la esfera y la carga inducida total.

(d) Escribir el potencial para $r \gg a$ conservando términos de hasta orden $(a/r)^3$. Interpretar en términos de la carga total y del momento dipolar total de las cargas fuentes e imágenes.

4. Utilizando el método de la función de Green, hallar la expresión del potencial electrostático en todo punto del espacio para una esfera cuya mitad superior está conectada a un potencial $V_1$ y la inferior a $V_2$. Resolver las integrales explícitamente para simplificar la expresión del potencial para puntos ubicados sobre el eje de simetría.

5. Un contorno mixto consiste en un plano infinito y una semiesfera de radio $a$, como muestra la figura.

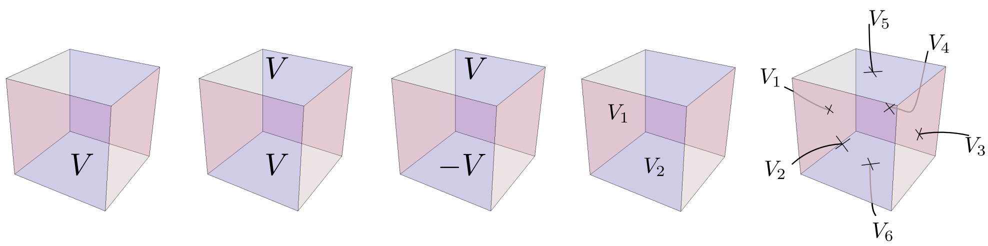



Calcular la función de Green (con condiciones de Dirichlet) en la región por encima del contorno. Interprete el resultado.

6. Utilice el método de imágenes para hallar la función de Green (con condiciones de Dirichlet) para la región contenida entre dos esferas concéntricas de radios $a$ y $b$. *Nota*: es necesario utilizar una serie infinita de imágenes.

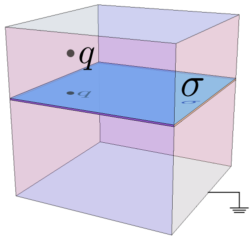
7. **Problema optativo:** Los centros de dos esferas conductoras de radio $a$ están a una distancia $2a$ uno del otro, de modo que las esferas se tocan en un sólo punto. Las esferas están aisladas, y cada una tiene carga $q$. Encontrar el potencial en todo el espacio. *Sugerencia*: empiece suponiendo que cada esfera se reemplaza por una carga puntual de valor $Q$ ubicada en su centro. Obtenga las relaciones de recurrencia para las sucesivas cargas imágenes y sus posiciones. Como en el problema anterior, estas relaciones estarán acopladas. Busque eliminar las posiciones para obtener relaciones de recurrencia que sólo involucren los valores de las cargas. Esas relaciones serán fáciles de resolver. Finalmente, calcule la suma de las cargas imágenes dentro de cada esfera y ajuste el valor de $Q$ para que esa carga sea igual a $q$. (Relacionado con esto, ver Smythe, § 6.081. *Difference Equations. Two Spheres*, y el último párrafo de la sección 6.9 del curso de Feynman, vol. 2.)

8. Un cubo de lado $a$ tiene sus tapas al potencial que muestra cada figura. Las tapas donde no se indica ningún valor del potencial están a tierra. Encontrar el potencial en el **interior** del cubo en cada caso.

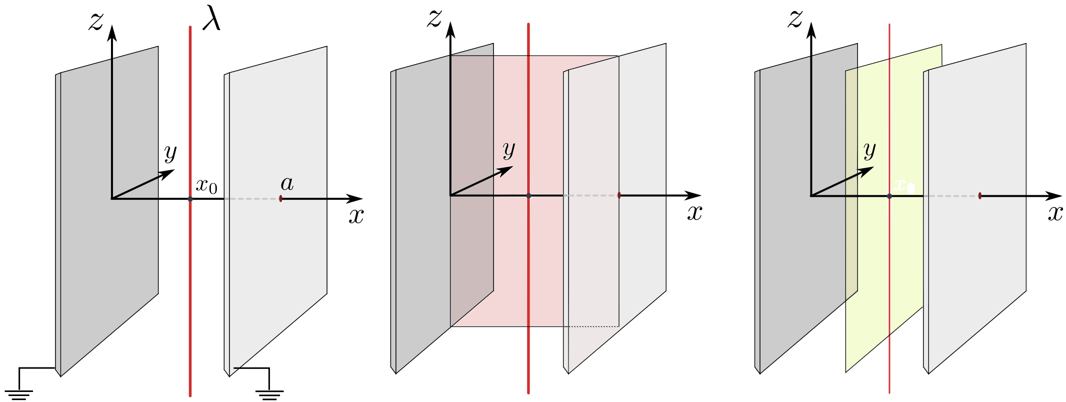



9. Los planos $z = 0$ y $z = a$ están a potenciales $V_1(x, y)$ y $V_2(x, y)$. Hallar el potencial en todo el espacio.

10 Un cubo de lado $a$ está conectado a tierra. En su interior hay un cuadrado con densidad superficial uniforme $\sigma$ y una carga puntual $q$. Calcule el potencial **en todo el espacio**.




11 Un alambre con densidad de carga constante $\lambda$ está equidistante a dos placas conductoras infinitas conectadas a tierra, como muestra la figura ($x_0 = a/2$).




Utilizando separación de variables, encuentre el potencial **en todo el espacio**. Para ello divida la región entre las placas de los siguientes modos:

(a) Con un corte vertical perpendicular a los planos.

(b) Con un corte vertical paralelo a los planos.

(c) Compare las dos formas de la solución. Tanto la integral como la suma de Fourier que han aparecido al aplicar las dos separaciones pueden hacerse de manera explícita y la solución es una función simple. Encuentre esa función.

12 (a) Encuentre por separación en cartesianas la función de Green de Dirichlet del espacio no acotado. Para eso, divida el espacio en dos en regiones con un plano paralelo al plano $xy$; la solución debe quedar escrita en la forma

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \int_{-\infty}^{\infty} dk_x dk_y \; e^{i[k_x(x-x')+k_y(y-y')]} \; \phi(k_x, k_y) \;\; f_{k_x k_y}(z - z').$$

(b) Encuentre la función de Green de Dirichlet del espacio no acotado proponiendo para $G$ un desarrollo de Fourier tridimensional,

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \int d^3\mathbf{p} \; e^{i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} \; \phi(\mathbf{p}),$$

y resolviendo directamente la ecuación de Poisson, $\nabla^2_{\mathbf{r}} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$.

(c) Comparando las dos formas de la función de Green del espacio no acotado obtenidas en los incisos anteriores, encuentre la transformada de Fourier de la función $f(z) = e^{-\kappa|z|}/\kappa$.

$\boxed{13}$ Encuentre la función de Green para el problema de Dirichlet en el interior de un cilindro semi-infinito de sección cuadrada de lado $a$ (es decir, $0 \leq x, y \leq a$, $0 \leq z < \infty$). Repita el cálculo para un cilindro cuadrado infinito (ahora $-\infty < z < \infty$).

$\boxed{14}$ (a) Encontrar el potencial de una carga puntual $q$ entre dos cáscaras esféricas conductoras concéntricas y conectadas a tierra, de radios $a$ y $b$, utilizando el método de separación de variables.

(b) Hallar la densidad de carga y la carga total inducida sobre cada esfera.

(c) Observar qué sucede cuando se hace tender el radio de la esfera exterior a infinito ¿Cuánto valen las cargas totales inducidas en ese caso?

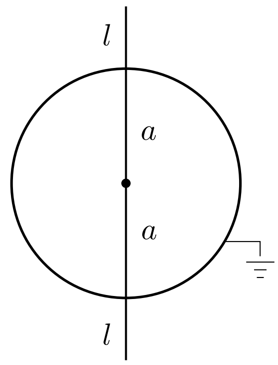
(d) Resolver el problema en el caso en que los potenciales de las esferas se elevan a $V_1$ y $V_2$. (Ver último problema de la guía 1).

(e) Resolver el problema en el caso en que las esferas están aisladas y tienen una carga total $Q_1$ y $Q_2$. (Ver último problema de la guía 1).

$\boxed{15}$ Resolver nuevamente el problema 2 utilizando el método de separación de variables.

$\boxed{16}$ Resolver nuevamente el problema 4 utilizando el método de separación de variables.

$\boxed{17}$ Una esfera de radio $a$ está a tierra. Por el centro de la esfera pasa una línea de longitud $d = 2(a+l)$ uniformemente cargada, como muestra la figura. Encontrar el potencial en todo el espacio.




$\boxed{18}$ Un cilindro de radio $a$ y altura $h$ tiene su superficie lateral conectada a tierra, mientras que las tapas se mantienen a potenciales $V$ y $-V$. Hallar el potencial en el interior del cilindro.

$\boxed{19}$ (a) Usando separación de variables en coordenadas cilíndricas, hallar el potencial y el campo electrostático producidos por un disco de radio $a$ cargado con densidad uniforme $\sigma$.

(b) A través de límites adecuados, verificar que la expresión obtenida se reduce en un caso a la de una carga puntual, y en otro a la de un plano infinito.

$\boxed{20}$ Encontrar la función de Green con condiciones de Dirichlet para el problema interno de un cilindro circular de radio $a$ y longitud $L$, separando en regiones de las siguientes maneras:

(a) Cortando con un plano perpendicular al eje del cilindro.

(b) Cortando con un cilindro coaxial al cilindro original.

$\boxed{21}$ Ídem al problema anterior pero para un cilindro de longitud infinita. Encuentre también la función de Green para el problema externo utilizando el segundo tipo de corte. ¿Sabría cómo resolver el problema externo usando el primer tipo de corte?

$\boxed{22}$ Encontrar la función de Green con condiciones de Dirichlet para el problema interno de una estructura con forma de cuarto de cilindro circular, infinito y de radio $a$, siguiendo estos dos caminos:

(a) Usando separación de variables en el cuarto de cilindro a partir de la ecuación para $\nabla^2\Phi$ en coordenadas cilíndricas y con condiciones de contorno adecuadas.

(b) Usando imágenes y la función de Green para el cilindro infinito obtenida en el problema anterior.

(c) Además del problema del cuarto de cilindro, que corresponde a un ángulo de $\alpha = \pi/2$ entre las tapas planas laterales, ¿para qué otros valores $\alpha$ puede resolverse el problema usando imágenes?

$\boxed{23}$ (a) Usando separación en coordenadas cilíndricas, calcular la función de Green con condiciones de Dirichlet para la región interna entre dos planos infinitos, ubicados en $z = 0$ y $z = L$.

(b) Si se coloca una carga $q$ a una altura $z$ entre los planos, calcular las densidades de carga y las cargas totales inducidas sobre cada plano.

(c) Observe que si bien la densidad superficial no tiene una expresión muy simple, el resultado para la carga total es llamativamente simple. La carga total sobre cada plano puede obtenerse de consideraciones más generales que no requieren calcular el potencial explícitamente. Lo que se usa es el llamado Teorema de Reciprocidad. Entre los problemas del capítulo 1 del Jackson figura este teorema y su aplicación al caso de los dos planos. En la tercera edición son los problemas 1.12 y 1.13. Quedan propuestos como problemas opcionales.

(d) Encuentre la función de Green mediante el método de imágenes. Para comparar esta suma infinita con el resultado del ítem (a), en cada término de la suma use alguno de los desarrollos de la función $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-1}$ en términos de funciones de Bessel y haga la suma explícitamente.