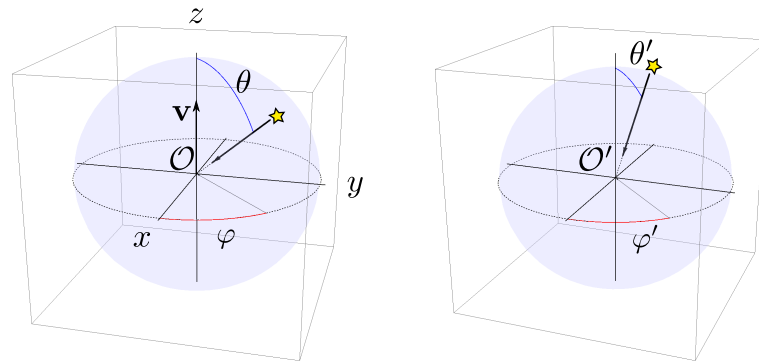


- 1 **Aberración relativista.** El observador \mathcal{O}' se mueve con velocidad relativa \mathbf{v} respecto de \mathcal{O} . En cierto instante, los dos observadores coinciden en el mismo punto del espacio. En ese momento, los dos reciben luz proveniente de una misma estrella muy lejana. Ambos observadores eligen su eje z en la dirección de \mathbf{v} , de modo que escribirán el vector de la velocidad de la luz recibida según expresiones análogas; el observador \mathcal{O} , por ejemplo, escribirá

$$\mathbf{c}_{\mathcal{O}} = -(\cos \varphi \sin \theta \hat{x} + \sin \varphi \sin \theta \hat{y} + \cos \theta \hat{z}) c$$

Obviamente, $|\mathbf{c}_{\mathcal{O}}| = |\mathbf{c}_{\mathcal{O}'}| = c$.



- (a) Si \mathcal{O} recibe la luz según la dirección definida por los ángulos θ y φ , aplicando las fórmulas de transformación de velocidades, muestre que, según \mathcal{O}' , la luz proviene de la dirección definida por los ángulos

$$\varphi' = \varphi, \quad \cos \theta' = \frac{\cos \theta + \beta}{1 + \beta \cos \theta}. \quad (\beta = v/c)$$

- (b) Deduzca estas mismas expresiones a partir de la transformación del cuadrivector número de onda.
- (c) Una fórmula importante, que puede deducir de lo anterior, relaciona las tangentes de los ángulos θ y θ' . Sabiendo que $\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{2}(1 - \cos x)$ y $\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{2}(1 + \cos x)$, deduzca la *fórmula de aberración relativista*:

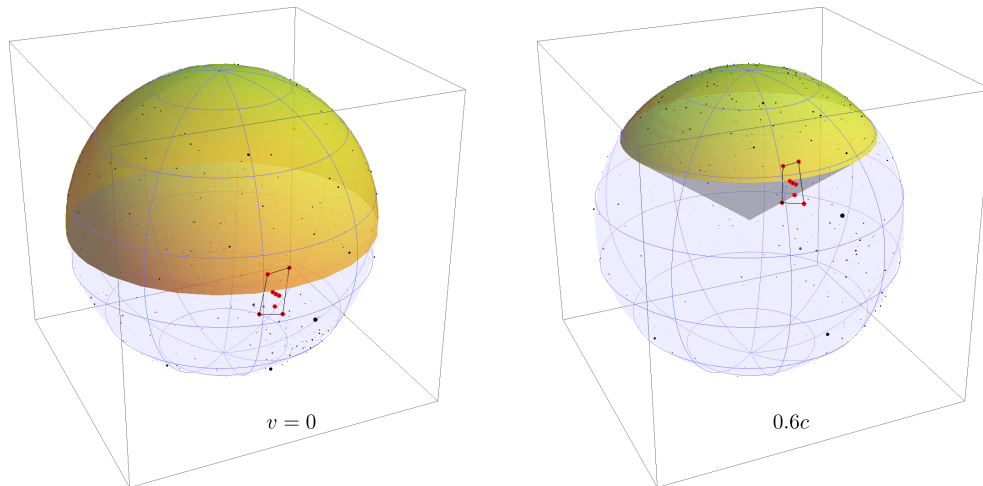
$$\tan \frac{\theta'}{2} = \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}} \tan \frac{\theta}{2}.$$

- (d) Muestre que todas las estrellas en el hemisferio $0 \leq \theta \leq \frac{1}{2}\pi$ de \mathcal{O} estarán concentradas, según \mathcal{O}' , en cierto cono alrededor del eje z . ¿Qué pasa cuando β se acerca a 1?
- (e) El observador \mathcal{O} ve una pequeña constelación triangular, cuyas 3 estrellas están en las direcciones

$$\hat{r} \rightarrow (\theta, \varphi), \quad \hat{r}_1 \rightarrow (\theta + \delta\theta_1, \varphi + \delta\varphi_1), \quad \hat{r}_2 \rightarrow (\theta + \delta\theta_2, \varphi + \delta\varphi_2).$$

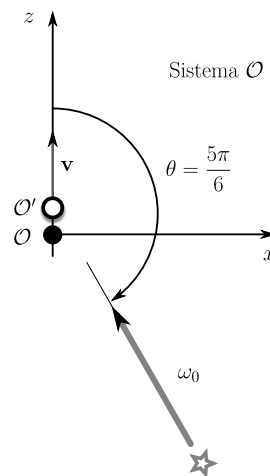
Halle las posiciones de las mismas estrellas según \mathcal{O}' a primer orden en los δ 's. ¿Qué relación geométrica guardan entre sí los triángulos que definen la constelación, según sea vista por uno u otro observador? ¿Pasará lo mismo con figuras más complicadas, como las Pléyades, o más extensas, como Orión?

- (f) Para hacer en la computadora. El archivo adjunto¹ contiene las orientaciones de las 1000 estrellas más brillantes vistas desde la Tierra. Con esas estrellas, construya el mapa celeste para un observador relativista. Repita el experimento para valores crecientes de v . ¿Se comprueban o desmienten sus primeras intuiciones?



Un ejemplo de lo que debe obtenerse para el cielo del observador \mathcal{O}' en las vecindades de la Tierra: \mathcal{O}' se mueve en dirección a la estrella polar, con la velocidad indicada en cada caso. La sección sombreada abarca las estrellas del hemisferio superior del cielo de un observador en la Tierra. Se ha trazado el contorno de la constelación de Orión.

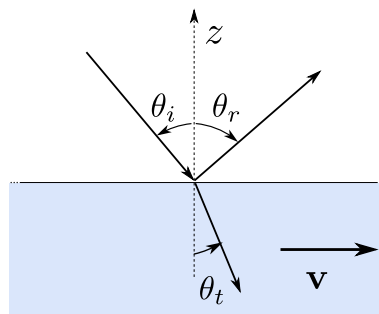
- 2 **Efecto Doppler relativista.** Los observadores \mathcal{O} y \mathcal{O}' del ejercicio anterior reciben luz proveniente de una misma estrella muy lejana, de nombre Betelgeuse. Vista desde la Tierra, Betelgeuse tiene un característico color anaranjado, $\lambda_0 = 600$ nm; a todos los efectos prácticos puede considerarse una fuente monocromática, con la correspondiente frecuencia $\omega_0 = 2\pi c/\lambda_0$, según \mathcal{O} . El observador \mathcal{O} ve la estrella en $\varphi = 0$ y $\theta = 5\pi/6$, como muestra la figura.



- (a) Si ω' es la frecuencia vista por \mathcal{O}' , **graficar** ω'/ω_0 en función de $\beta = v/c$, para β entre 0 y 1. Indicar la posición del mínimo y el valor de ω'/ω_0 en ese punto.
- (b) Asuma que las longitudes de onda visibles son las comprendidas entre 400 nm y 800 nm. Es decir, $\omega_{\max} = \frac{3}{2}\omega_0$ y $\omega_{\min} = \frac{3}{4}\omega_0$. Suponiendo que el observador \mathcal{O}' acelera sucesivamente desde velocidad $v = 0$ hasta una velocidad arbitrariamente próxima a la de la luz, ¿para qué rango de velocidades es capaz de ver la estrella? Calcular la secuencia de valores de β para los cuales la estrella desaparece o aparece en el cielo de \mathcal{O}' .
- 3 Un sistema inercial S' se mueve con velocidad \mathbf{v} respecto de un sistema S . Puede asumirse que los ejes de los dos sistemas coinciden en $t' = t = 0$.

¹http://materias.df.uba.ar/ft1a2015c2/files/2015/11/catalogo_de_estrellas.rar. El formato es $(\varphi, \theta, \text{magnitud})$.

- (a) Si en S se miden los campos $\mathbf{E}(t, \mathbf{r})$ y $\mathbf{B}(t, \mathbf{r})$, encuentre $\mathbf{E}'(t', \mathbf{r}')$ y $\mathbf{B}'(t', \mathbf{r}')$ en S' .
- (b) Si en S se propaga una onda plana caracterizada por los campos $\mathbf{E}(t, \mathbf{r}) = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)}$ y $\mathbf{B} = \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}$, demuestre que en S' también se propaga una onda plana.
- (c) Si en S se miden los campos estáticos $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ y $\mathbf{B}(\mathbf{r})$, encuentre los campos en S' en los siguientes casos: 1) $\mathbf{B} = 0$, $\mathbf{E} \parallel \mathbf{v}$; 2) $\mathbf{B} = 0$, $\mathbf{E} \perp \mathbf{v}$; 3) $\mathbf{E} = 0$, $\mathbf{B} \parallel \mathbf{v}$; 4) $\mathbf{E} = 0$, $\mathbf{B} \perp \mathbf{v}$. Proponga ejemplos para cada situación.
- 4 **¿Verdadero o Falso?** En un sistema S , en cierto instante de tiempo y cierto punto del espacio se miden campos \mathbf{E} y \mathbf{B} . Decidir si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa.
- (a) Si \mathbf{E} y \mathbf{B} son perpendiculares, lo mismo sucede en cualquier otro sistema inercial.
- (b) La relación de orden entre $|\mathbf{E}|$ y $|\mathbf{B}|$ es la misma en todos los sistemas.
- (c) Si \mathbf{E} es perpendicular a \mathbf{B} y $|\mathbf{E}| \neq |\mathbf{B}|$, entonces puede encontrarse un sistema en el cual, asociado al mismo evento, o bien sólo hay campo eléctrico o bien solamente campo magnético.
- 5 En un sistema de referencia inercial S , el campo eléctrico forma un ángulo θ con el campo magnético. Ambos campos son uniformes y estáticos.
- (a) Encontrar un sistema de referencia S' tal que los campos sean paralelos.
- (b) Si en S los módulos de los campos cumplen $B_0 = 2E_0$, calcular los campos en el sistema de referencia hallado en (a). Tomar el límite para $\theta \ll 1$ y para $\theta \rightarrow \pi/2$.
- 6 **Fresnel relativista.** En el sistema de laboratorio, una onda plana, de frecuencia ω y amplitud \mathbf{E} , incide desde el vacío sobre la superficie de un líquido de índice de refracción n y $\mu = 1$. El líquido ocupa el semiespacio $z < 0$ y se mueve con velocidad v paralela a su superficie. En el laboratorio, la polarización de la onda puede ser TE o TM. Encuentre la dirección, la amplitud, la polarización y la frecuencia de las ondas transmitidas y reflejadas en el sistema de laboratorio.



- 7 Un cilindro circular macizo y de longitud infinita tiene densidad de carga y de corriente uniformes. La corriente es paralela al eje del cilindro. Encontrar un sistema de referencia en el cual sólo hay campo magnético o eléctrico. ¿Es único?
- 8 Una lámina plana infinita tiene densidad de carga superficial constante σ y se encuentra en reposo en cierto sistema inercial S .
- (a) Hallar los campos eléctrico y magnético en un sistema que se mueve con velocidad \mathbf{v} constante paralela a la lámina
- por transformación directa de los campos;
 - a partir de la transformación de las fuentes.

(b) ¿Qué campo eléctrico y magnético verá un observador que se mueve con velocidad constante perpendicular a la lámina?

9 Un dipolo magnético puntual \mathbf{m} se encuentra en reposo en el origen de un sistema S' , por lo tanto los potenciales en este sistema están dados por $\Phi' = 0$ y $\mathbf{A}' = \mathbf{m} \times \mathbf{r}'/r'^3$. El sistema S' se mueve con velocidad \mathbf{v} respecto al sistema de laboratorio S .

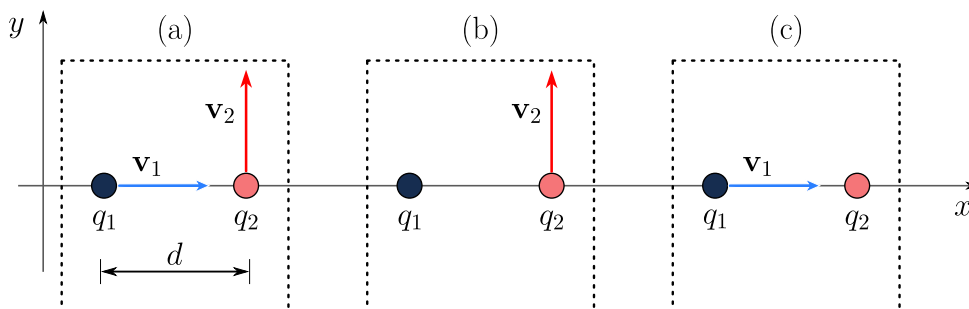
(a) Demostrar que en S los potenciales a primer orden en β son

$$\Phi = \frac{(\mathbf{v} \times \mathbf{m}) \cdot \mathbf{R}}{c R^3}, \quad \mathbf{A} = \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{R}}{R^3},$$

con $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t)$, donde $\mathbf{r}_0(t)$ es la posición del origen de S' medida en S .

(b) Encontrar los campos \mathbf{E} y \mathbf{B} en S , a primer orden en β , transformando directamente los campos $\mathbf{E}' = 0$ y \mathbf{B}' del sistema S' . Comparar con las expresiones anteriores.

10 En los tres casos indicados en la figura, calcular la fuerza que cada carga ejerce sobre la otra en el instante mostrado. Verificar que las fuerzas no son iguales y opuestas. ¿Qué pasa con la conservación del impulso? Las partículas son mantenidas en su estado de movimiento uniforme por un agente externo; o bien están fijas o bien se mueven a velocidad constante. [Ref: Found. Phys. (2009) 39:295 doi 10.1007/s10701-009-9283-z].



11 Encontrar la trayectoria de una partícula cargada en cada caso:

(a) La partícula parte desde el origen a $t = 0$ con impulso $\mathbf{p} = p_0 \hat{y}$ en un campo eléctrico uniforme y estático $\mathbf{E} = E \hat{x}$.

(b) Movimiento en un campo magnético estático y uniforme.

(c) Movimiento en campos \mathbf{E} y \mathbf{B} , estáticos y uniformes, tales que $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = 0$. Analizar por separado cada uno de los siguientes casos $E < B, B < E, E = B$.

Dos problemas de física aplicada

EL MONSTRUO RELATIVISTA O LO QUE MATA ES EL RELUMBRÓN

Example 3.7 A sphere subtends an angle 2θ when seen from a point P in its rest frame. An observer O passes through P with velocity v . Show that to O , the sphere appears to subtend an angle 2α such that

$$c \cot \alpha = \gamma(v)(c \cot \theta + \mathbf{e} \cdot \mathbf{v} \operatorname{cosec} \theta),$$

where \mathbf{e} is a unit 3-vector in the frame of the sphere in the direction from P to the centre of the sphere.

A disconcerting consequence of the formula in this example is that $\alpha \rightarrow \pi$ as $\mathbf{v} \rightarrow -c\mathbf{e}$. If O accelerates instantaneously directly *away* from the sphere, and increases his speed towards the velocity of light, then the area of the sky filled by the sphere grows. When his speed is $c \cos \theta$, $\alpha = \pi/2$, and the sphere occupies half the sky. At higher speeds, it occupies more than half the sky, and in the limit, only a small hole in the observer's forward direction is left uncovered.

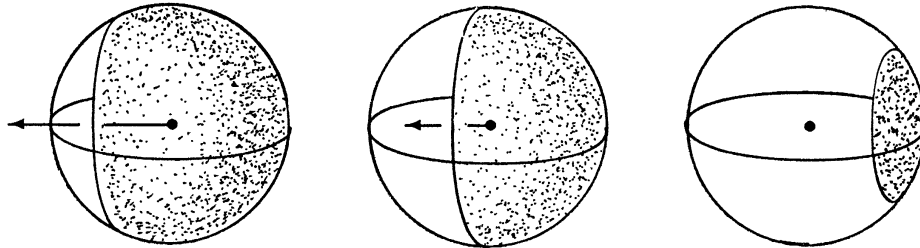


Fig. 3.6. The outline of the sphere as O accelerates away from it to the left. The spheres in the figure represent the sky, with the observer at the centre. The shaded portions are the areas covered by the images of the solid sphere

If an astronaut sees a space monster approaching, with jaws open ready to swallow his spaceship, and if he attempts to accelerate sharply away from the danger, then, when his speed exceeds $c \cos \theta$, where 2θ is the angle originally subtended by the jaws, he appears to be inside the monster's mouth. As he accelerates further, the jaws close around him. He is eventually killed by the glint on the monster's teeth, which is blue-shifted to high-frequency gamma radiation (exercise).

(Woodhouse, *Special Relativity*, 1992.)

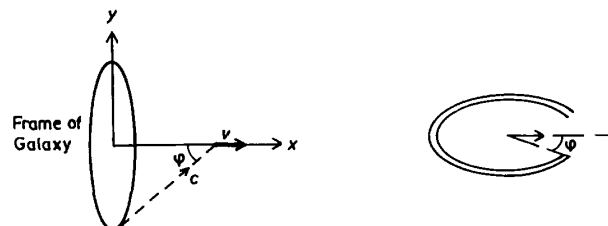
LA APUESTA DE FEYNMAN

In a simplified version of the ending of one of Fred Hoyle's novels, the hero, traveling at high Lorentz factor at right angles to the plane of our galaxy (Fig. 3.12), said he appeared to be inside and heading toward the mouth of a "goldfish bowl" with a blue rim and a red body (Fig. 3.13). Feynman betted 25 cents that the light from the galaxy would not look that way. We want to see who was right. Take the relative speed to be $\beta = 0.99$ and the angle φ in the frame of the galaxy to be 45° (Fig. 3.12).

(a) Derive (or recall) an expression for the relativistic aberration and use it to calculate (Fig. 3.13) the direction from which light from the edge of the galaxy appears to come when viewed in the spacecraft.

(b) Derive (or recall) the relativistic Doppler effect and use it to calculate the frequency ratio ν'/ν for light from the edge.

(c) Calculate φ' and ν'/ν at enough angles φ to decide who won the bet.



(Yung-Kuo Lim, *Problems and solutions on Mechanics*, 1994.)