$\boxed{1}$ Una partícula no relativista de carga Ze, masa m y energía cinética inicial $\mathcal{E}$ incide frontalmente desde el infinito sobre un centro de fuerzas fijo en el origen. La interacción es repulsiva y está descripta por un potencial $V(r)$ que es mayor que $\mathcal{E}$ a distancias suficientemente cercanas al origen y que decae a cero en el infinito.

(a) Mostrar que la energía total radiada está dada por

$$\Delta W = \frac{4}{3}\frac{Z^2e^2}{m^2c^3}\sqrt{\frac{m}{2}}\int_{r_{\rm min}}^{\infty} dr\,\frac{V'(r)^2}{\sqrt{V\left(r_{\rm min}\right)-V(r)}},$$

donde $r_{\rm min}$ es la distancia de máximo acercamiento al centro de fuerzas. (Jackson)

(b) Si la interacción es Coulombiana, $V(r) = ZZ'e^2/r$, mostrar que la energía total irradiada es

$$\Delta W = \frac{8}{45}\frac{Zmv_0^5}{Z'c^3},$$

donde v_0 es la velocidad de la carga incidente en el infinito.

(c) Como caso particular, considerar un positrón que incide sobre un protón. Si la velocidad inicial del positrón en el infinito es v_0, estimar su velocidad final como resultado de la perdida de energía por radiación, despreciando el movimiento del protón. ¿Cómo está polarizada la radiación? Despreciando ahora los efectos de la pérdida de energía por radiación, pero teniendo en cuenta la masa finita del protón, estimar la velocidad final del positrón. Compare los dos resultados para la velocidad final.

$\boxed{2}$ Este problema es la versión relativista del anterior. Una partícula relativista de carga q y masa m que se mueve sobre el eje x incide sobre una partícula de carga Q fija en el origen. Las dos cargas tienen el mismo signo. Inicialmente, en $x \to \infty$ y $t \to -\infty$, la partícula de masa m está caracterizada por un factor relativista γ_0.

(a) Demuestre primero que para una partícula de masa m y carga q

$$m\gamma(\mathbf{v})\dot{\mathbf{v}} = q\Big[\mathbf{E} + \boldsymbol{\beta}\times\mathbf{B} - (\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{E})\,\boldsymbol{\beta}\Big].$$

Esta fórmula se usa mucho en los problemas relativistas para obtener $\dot{\mathbf{v}}$.

(b) Encuentre x como función de γ. ¿Cuál es la distancia de máximo acercamiento?

(c) Encuentre $\dot{v}$ como función de γ.

(d) Encuentre $\dot{\gamma}$ como función de γ.

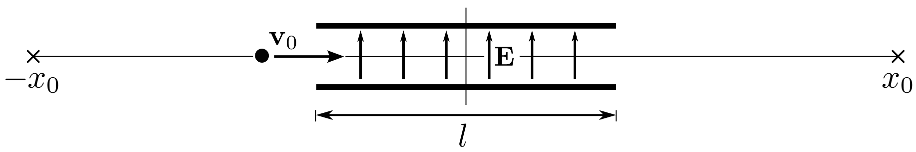
(e) Escriba la potencia radiada como función de γ.

(f) Escriba la energía total radiada como una integral, $\Delta W = \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} d\gamma\, f(\gamma)$, dando los valores de γ_1, γ_2 y la función f en términos de los datos del problema.

$\boxed{3}$ (a) Una partícula de carga $-e$ y masa m gira alrededor de otra mucho más pesada de carga Ze. El radio de la órbita circular es inicialmente R. Calcular el tiempo que tarda la partícula más liviana en caer al centro debido a la pérdida de energía por radiación, y calcular el número de vueltas que realiza antes de caer. Asumir que el movimiento es no relativista y que la energía radiada por ciclo es mucho menor que la energía potencial de la partícula en movimiento circular. Recordar que para una órbita circular en un potencial atractivo de la forma $-\alpha/r$, la energía total (sin considerar la energía en reposo mc^2) es igual a $1/2$ de la energía potencial.

(b) Calcular el tiempo de caída y el número de vueltas en el caso de un electrón orbitando alrededor de un protón. Inicialmente el electrón se mueve en una órbita circular correspondiente al radio de Bohr. Datos: $m_e c^2 = 511$ keV, energía de ionización $= 13{,}6$ eV, radio de Bohr $= 5{,}3 \times 10^{-11}$ m, $c = 3 \times 10^8$ m/s. ¿Qué falla primero, la aproximación no relativista o la aproximación de energía radiada por ciclo mucho menor que la energía potencial?

4 Una partícula relativista de carga q y masa m pasa a través de un capacitor de placas paralelas de longitud l. El campo $\mathbf{E}$ en el interior del capacitor es homogéneo y constante. La partícula ingresa al capacitor con una velocidad $\mathbf{v}_0$ perpendicular a $\mathbf{E}$ y paralela a las placas, y viaja tan rápido que su desviación puede despreciarse.



(a) Calcule la energía total irradiada durante el paso de la partícula por el capacitor.

(b) Escriba la expresión del campo eléctrico de **radiación** y grafíquelo cualitativamente en función del tiempo para los puntos $-x_0$ y x_0, que se encuentran sobre la línea que sigue la partícula, simétricos respecto del centro del capacitor y **muy alejados** de éste. Tenga especial cuidado en el cálculo de los intervalos temporales en que ese campo es distinto de cero.

5 Para todos los sistemas que se enumeran más abajo:

- Calcular los campos de radiación $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$ hasta orden dipolar magnético y cuadrupolar eléctrico.
- Graficar cualitativamente $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$ sobre la superficie de una esfera.
- Calcular la potencia por unidad de ángulo sólido y graficar su promedio temporal en función de la dirección.
- Calcular la potencia total emitida en todas las direcciones y su promedio temporal.
- Indicar la frecuencia angular de la radiación emitida.

(a) Una carga q que gira en una órbita circular de radio a con frecuencia angular ω.

(b) Dos cargas q y $-q$ separadas una distancia d que giran diametralmente opuestas en el plano xy con frecuencia angular ω.

(c) Ídem al anterior pero ahora para dos cargas iguales de valor q.

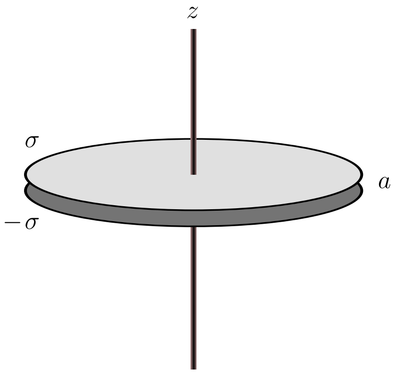
(d) Un dipolo magnético $\mathbf{m}$ que rota con velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$. El ángulo entre $\mathbf{m}$ y $\boldsymbol{\omega}$ es α.

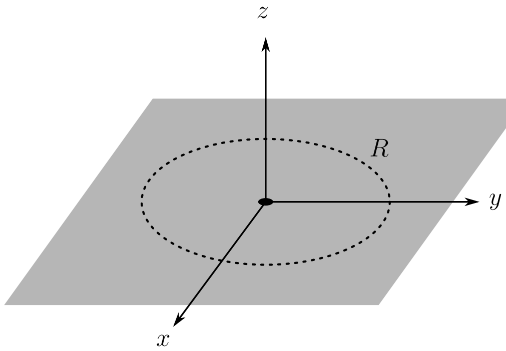
6 **Magnetars**. El pulsar SGR 1806-20 rota con un período $T = 7{,}5$ s. En su superficie esto representa una velocidad de 30000 km/h. La velocidad de frenado de esta rotación es inusualmente alta en términos astronómicos, siendo $\dot{T} = 8 \times 10^{-11}$. Calcule el máximo campo magnético sobre la superficie del pulsar, asumiendo que su masa y su radio son los típicos de este tipo de estrellas ($m = 1{,}4 M_\odot = 2{,}8 \times 10^{30}$ kg, $r = 10$ km) y que el frenado en la rotación se produce debido a la pérdida de energía por radiación. Suponga además que la velocidad angular es perpendicular al momento magnético de la estrella. [K. T. McDonald, "Magnetars", Am. J. Phys. **68** (2000) 775.]

$\boxed{7}$ Dos discos de radio a están cargados uniformemente en superficie con densidades σ y $-\sigma$, respectivamente. Los discos están en el plano xy, centrados en el origen, uno sobre el otro a una distancia despreciable y pueden rotar de manera independiente alrededor del eje z. Inicialmente están en reposo. Desde $t = 0$ hasta $t = T$ se aplican sobre los discos torques de sentidos opuestos, pero de la misma magnitud:

$$\tau(t) = \tau_0 \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi t}{T}\right) ,$$

de modo que los discos giran siempre con velocidades angulares opuestas entre sí. El momento de inercia de los discos es I. Despreciar el torque debido a los campos inducidos.





(a) Encontrar los campos de radiación $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ y $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ hasta el primer orden no nulo en el desarrollo multipolar.

(b) Considerar un punto sobre el eje x a una distancia R del origen. Graficar el campo eléctrico de radiación y la intensidad por ángulo sólido en función del tiempo.

(c) Considerar un círculo de radio R en el plano xy centrado en el origen. Graficar en varias viñetas los campos de radiación $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$ sobre el círculo, de manera de representar cualitativamente su evolución para todo $t > 0$.

(d) Fijado $t > 0$, indicar la región en el plano xy en donde la intensidad de la radiación es distinta de cero.

(e) Calcular la energía total radiada por los discos.

$\boxed{8}$ **Radiación de Cherenkov.** Una partícula cargada se mueve con velocidad v constante en un medio con $\mu = 1$ y $n = \sqrt{\varepsilon} > 1$. Demostrar que la partícula emite radiación si $v > c/n$. Este tipo de radiación (conocida como radiación de Cherenkov) es frecuente en los reactores nucleares moderados por agua.

$\boxed{9}$ Decidir si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa. Justificar.

(a) Se tiene una partícula de carga q que se mueve con velocidad constante $\mathbf{v}$. En este caso, utilizando la ley de Gauss, es posible determinar que el campo eléctrico generado por dicha partícula es $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = q\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_0(t)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0(t))|^3}$, siendo $\mathbf{r}_0(t)$ la posición de la partícula a tiempo t.

(b) La energía que emite la Tierra por la rotación diurna de su momento dipolar magnético alcanzaría para iluminar cómodamente al menos un estadio de fútbol. (El campo magnético de la Tierra, medido en la superficie, es de alrededor de 0,5 gauss, en unidades *cgs*. El radio de la Tierra es de unos 6×10^8 cm y un día tiene cerca de 10^5 segundos. El momento magnético de la Tierra forma unos $10°$ con su eje de rotación.)