Esfera conductora penetrada por una corriente

El enunciado nos dice: *Una esfera tiene radio a y conductividad σ. Una corriente I ingresa perpendicular a la esfera por un punto A, y egresa por un punto B diametralmente opuesto. El régimen es estacionario. Encontrar el potencial dentro de la esfera.*

Este es un ejercicio cuya solución se encuentra al final del capítulo 21 del Laundau & Lifshitz pero allí está resuelto de una manera poco ortodoxa. Vamos a resolverlo de otra manera.

Consideraremos que la corriente I ingresa a la esfera conductora por el polo sur y egresa por el polo norte. Orientado de esta manera es evidente que el problema tiene simetría de rotación alrededor del eje z (el eje que une el polo sur y el norte) por lo que el potencial eléctrico será una función de la coordenada radial r y la altitud θ.

Dado que estamos en el régimen estacionario tenemos que $\vec{\nabla}.\vec{J} = 0$ y como en el conductor $\vec{J} = \sigma\vec{E}$ tenemos entonces que al interior $\vec{\nabla}.\vec{E} = 0$, es decir, no hay cargas en el interior de la esfera (no podemos decir lo mismo sobre la cáscara que separa al conductor del exterior).

No habiendo cargas en el interior tenemos que el potencial eléctrico satisface allí la ecuación de Laplace $\nabla^2\phi = 0$. Dada la dependencia funcional que previmos y el hecho de que no debe haber divergencias en $r = 0$ la forma funcional general del mismo será

$$\phi(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l\, r^l\, P_l(\cos\theta) \tag{1}$$

Por otro lado debemos considerar las condiciones de contorno en la superficie $r = 0$. Allí tenemos una corriente que ingresa por el polo sur $\theta = \pi$ y egresa por el polo norte $\theta = 0$. Está condición puede ser parametrizada así:

$$\vec{J}.\hat{r}\Big|_{r=a} = \frac{I}{2\pi a^2}\left(\delta(\cos\theta - 1) - \delta(\cos\theta + 1)\right) \tag{2}$$

Las deltas de Dirac localizadas en $\theta = 0, \pi$ nos garantizan que solo entrará o saldrá corriente por el polo sur y el polo norte de la esfera. Por otro lado el factor $2\pi a^2$ garantiza que

$$\iint\limits_{\text{sur}} d\vec{S}.\vec{J} = -I, \qquad \iint\limits_{\text{norte}} d\vec{S}.\vec{J} = I \tag{3}$$

donde la integral sur es cualquier integral de flujo en un dominio abierto sobre la esfera que incluya al polo sur (y no incluya al norte) y, al revés, la integral norte es cualquier integral de flujo en un dominio abierto sobre la esfera que incluya al polo norte (y no incluya al sur). Observemos que el flujo sobre toda la esfera es

$$\oiint\limits_{\text{esfera}} d\vec{S}.\vec{J} = \iint\limits_{\text{hem. sur}} d\vec{S}.\vec{J} + \iint\limits_{\text{hem. norte}} d\vec{S}.\vec{J} = -I + I = 0 \tag{4}$$

consistente con $\vec{\nabla}.\vec{J} = 0$.

Como $\vec{J} = \sigma\vec{E}$ y $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$, la condición de contorno para $\vec{J}$ se traduce en ϕ en

$$\frac{\partial\phi}{\partial r}\Big|_{r=a} = \frac{I}{2\pi\sigma a^2}\left(\delta(\cos\theta + 1) - \delta(\cos\theta - 1)\right) \tag{5}$$

Usando la expansión para el potencial (1) tenemos entonces

$$\sum_{l=1}^{\infty} A_l\, l\, a^{l-1} P_l(\cos\theta) = \frac{I}{2\pi\sigma a^2}\left(\delta(\cos\theta + 1) - \delta(\cos\theta - 1)\right) \tag{6}$$

donde hemos cambiado el inicio de la suma a $l = 1$ pues el sumando para $l = 0$ es cero. Notemos que esto último implica que no podremos fijar la constante A_0 del potencial con la condición (6) pero esto es razonable pues la condición de contorno (5) es sobre la derivada y el modo $l = 0$ es un modo constante del potencial. Para apuntar al resultado del Landau & Lifshitz usamos, como él, arbitrariamente, que $\phi(r = 0, \theta) = 0$ lo que implica que $A_0 = 0$.

Superada esta discusión, debemos invertir la ecuación (6) para obtener los coeficientes A_l. Para eso multiplicamos a ambos lados por $\sin\theta P_{l'}(\cos\theta)$ e integramos en θ obteniendo

$$A_l' \frac{2l'}{2l'+1} a^{l'-1} = -\frac{I}{2\pi\sigma a^2}(P_{l'}(1) - P_{l'}(-1)) \tag{7}$$

volviendo $l' \to l$ y usando que $P_l(1) = 1$ y que $P_l(-1) = (-1)^l$ obtenemos

$$A_l = -\frac{I}{2\pi\sigma} \frac{1}{a^{l+1}} \frac{2l+1}{2l} \left(1 - (-1)^l\right) \tag{8}$$

y el potencial al interior del conductor nos queda entonces

$$\phi(r,\theta) = -\frac{I}{2\pi\sigma a} \sum_{l=1}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^l \frac{2l+1}{2l} \left(1 - (-1)^l\right) P_l(\cos\theta) \tag{9}$$

vemos que esperablemente se anulan los modos pares lo que implica que $\phi \to -\phi$ ante la transformación de paridad $z \to -z$. Por otro lado es posible ver que el cociente $\frac{I}{\sigma}$ tiene unidades de carga eléctrica, por lo tanto, el potencial tiene unidades de carga/distancia, como debe ser.

Podríamos contentarnos con esta expresión pero nos gustaría poder comparar con el resultado final del Landau & Lifshitz que es una combinación de funciones elementales (racionales, irracionales, hiperbólicas, trigonométricas) de r y θ; deberíamos entonces intentar sumar la serie (9).

Notemos que dentro de la serie tenemos el cociente $\frac{2l+1}{2l}$ que podemos descomponerlo como

$$\frac{2l+1}{2l} = 1 + \frac{1}{2l} \tag{10}$$

dividiendo así el potencial en dos pedazos $\phi = \phi_1 + \phi_2$ con

$$\begin{aligned} \phi_1(r,\theta) &= -\frac{I}{2\pi\sigma a} \sum_{l=1}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^l \left(1 - (-1)^l\right) P_l(\cos\theta) \\ \phi_2(r,\theta) &= -\frac{I}{4\pi\sigma a} \sum_{l=1}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^l \frac{1}{l} \left(1 - (-1)^l\right) P_l(\cos\theta) \end{aligned} \tag{11}$$

El segundo pedazo, con $\sim \frac{1}{l}$ será más el más difícil de sumar. Para el primer pedazo tomemos la sugerencia del enunciado del ejercicio*

$$\frac{1}{\sqrt{1 + t^2 \mp 2tx}} = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(x)\,(\pm t)^l \tag{12}$$

Tomemos la expresión con el signo de arriba menos la expresión con el signo de abajo obteniendo

$$\frac{1}{\sqrt{1 + t^2 - 2tx}} - \frac{1}{\sqrt{1 + t^2 + 2tx}} = \sum_{l=1}^{\infty} P_l(x) \left(1 - (-1)^l\right) t^l \tag{13}$$

*Existe un signo erróneo en esta expresión en la guía

Podemos usar esta expresión para obtener

$$\phi_1(r,\theta) = \frac{I}{2\pi\sigma}\left(\frac{1}{R_+(r,\theta)} - \frac{1}{R_-(r,\theta)}\right), \quad \text{con} \quad R_\pm(r,\theta) = \sqrt{r^2 + a^2 \pm 2ar\cos\theta} \tag{14}$$

donde $R_\pm$ es la distancia entre el punto de observación y el polo sur y norte respectivamente.

Para obtener el pedazo ϕ_2 necesitamos hacer aparecer un factor $\sim \frac{1}{l}$ en la serie del lado derecho de (13). Para esto multiplicamos ambos lados de (13) por $\frac{1}{t}$ y tomamos una primitiva en t a ambos lados. Del lado izquierdo usamos que

$$\int dt\, \frac{1}{t\sqrt{1+t^2 \pm 2tx}} = \log(t) - \log\left(1 \pm tx + \sqrt{1+t^2 \pm 2tx}\right) + c_\pm(x) \tag{15}$$

donde $c_\pm(x)$ es constante en t pero puede eventualmente depender de x. Usando esto en (13) obtenemos

$$\log\left(\frac{1 + tx + \sqrt{1+t^2+2tx}}{1 - tx + \sqrt{1+t^2-2tx}}\right) = \sum_{l=1}^{\infty} P_l(x)\left(1 - (-1)^l\right)\frac{t^l}{l} \tag{16}$$

donde hemos fijado la constante de integración evaluando a ambos lados en $t = 0$. Podemos usar esta expresión vara evaluar ϕ_2:

$$\phi_2(r,\theta) = -\frac{I}{4\pi\sigma a}\log\left(\frac{a + r\cos\theta + R_+(r,\theta)}{a - r\cos\theta + R_-(r,\theta)}\right) \tag{17}$$

quedandonos así el resultado final

$$\phi(r,\theta) = \frac{I}{2\pi\sigma}\left[\frac{1}{R_+(r,\theta)} - \frac{1}{R_-(r,\theta)} + \frac{1}{2a}\sinh^{-1}\left(\frac{a - r\cos\theta}{r\sin\theta}\right) - \frac{1}{2a}\sinh^{-1}\left(\frac{a + r\cos\theta}{r\sin\theta}\right)\right] \tag{18}$$

donde hemos usado que la el arcoseno-hiperbólico se relaciona con el logaritmo através de $\sinh^{-1}(x) = \log(x + \sqrt{1+x^2})$. Notemos que esta es exáctamente la expresión del Landau & Lifshitz a menos de un signo global (debido a que él consideró la corriente entrando por el norte y saliendo por el sur).