Ejercico 8 de la Guía 5

a) Cuando un conductor está en movimiento, sus cargas ya no sólo se mueven debido a la presencia de un campo eléctrico, sino que ahora también pueden ser afectadas por un campo magnético. Es decir, al mover un conductor, también estamos haciendo que se muevan las cargas dentro del mismo, y por lo tanto la fuerza que sienten ya no es más $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$, sino que ahora está dada por la versión completa de la fuerza de Lorentz $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}\times\mathbf{B}}{c})$. Como consecuencia, debemos generalizar la ley de Ohm para que tenga en cuenta esto:

$$\mathbf{J} = \sigma \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}}{c} \right) \tag{1}$$

Nos interesa calcular los campos $\mathbf{E}$, $\mathbf{J}$ y $\mathbf{B}$, hasta primer orden en ω. Podemos empezar por calcular el potencial Φ, para luego obtener $\mathbf{E}$, luego $\mathbf{J}$ y finalmente $\mathbf{B}$. Para esto, identifiquemos primero cuáles son las fuentes de $\mathbf{E}$.

Lo primero que haremos es comprobar que no hay cargas de volumen (a primer orden en ω). Para esto partamos de la base de que el ejercicio plantea que estamos en el régimen estacionario, con lo cual

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \tag{2}$$

se reduce a

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0. \tag{3}$$

Combinando ésto con la ley de Ohm para un conductor en movimiento:

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0 = \sigma \left(\nabla \cdot \mathbf{E} + \frac{\nabla \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{B})}{c} \right) \tag{4}$$

Usando que para un cuerpo rígido rotante $\mathbf{v} = \omega \times \mathbf{r}$, obtenemos

$$0 = \sigma \left(\nabla \cdot \mathbf{E} + \frac{\nabla \cdot ((\omega \times \mathbf{r}) \times \mathbf{B})}{c} \right) \tag{5}$$

En esta ecuación, $\mathbf{B}$ corresponde al campo magnético total dentro del conductor, que tendrá una contribución dada por el campo externo $\mathbf{B}_0$ y otra generada por el movimiento de la esfera conductora. Esta útlima es de órden $O(\omega)$, por lo que al incluirla en la ecuación 4 daría un efecto de orden $O(\omega^2)$ que el enunciado no pide. Por lo tanto, a esta altura podemos reemplazar $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0$. Si aceptamos esto, podemos permutar el producto mixto de la ecuación 4 así $\nabla \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{B}_0) = \mathbf{B}_0 \cdot (\nabla \times \mathbf{v})$. Así, la ecuación 5 la reescribimos como

$$0 = \sigma \left(\nabla \cdot \mathbf{E} + \frac{\mathbf{B}_0 \cdot (\nabla \times (\omega \times \mathbf{r}))}{c} \right) \tag{6}$$

Acá podemos aplicar la identidad $A \cdot (B \times C) = B(A \cdot C) - C(A \cdot B)$, obteniendo

$$0 = \sigma \left(\nabla \cdot \mathbf{E} + \frac{\mathbf{B}_0 \cdot [\omega(\nabla \cdot \mathbf{r}) - \mathbf{r}(\nabla \cdot \omega)]}{c} \right) \tag{7}$$

Luego usamos que ω es constante con lo cual $\nabla \cdot \omega = 0$ y que $\nabla \cdot \mathbf{r} = 3$.

$$0 = \sigma \left(\nabla \cdot \mathbf{E} + \frac{\mathbf{B}_0 \cdot \omega.3}{c} \right) \tag{8}$$

Finalmente, como en nuestro problema $\mathbf{B}_0$ es perpendicular al eje de rotación, y por ende perpendicular al vector ω, ocurre que $\mathbf{B}_0 \cdot \omega = 0$. Así obtenemos que

$$0 = \sigma\left(\nabla \cdot \mathbf{E}\right) \tag{9}$$

Lo cual implica que no hay fuentes de volumen para el campo $\mathbf{E}$. Como consecuencia de esto, vale la ecuación de Laplace en el interior de la esfera, y podemos usar la solución que conocemos en esféricas:

$$\Phi = \sum_{lm} A_{lm} Y_{lm}(\theta, \phi) \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}}. \tag{10}$$

Para calcular los coeficientes A_{lm} del potencial, usamos la condicion de contorno del salto de la componente normal de la corriente:

$$(\mathbf{J}_2 - \mathbf{J}_1) \cdot \hat{n} = 0 \tag{11}$$

donde $\mathbf{J}_2 = 0$ es la corriente afuera de la esfera, y $\mathbf{J}_1$ es la corriente adentro dada por la ley de Ohm de un conductor en movimiento. Entonces la ec. 11 queda

$$-\sigma\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{v} \times \mathbf{B}\right) \cdot \hat{r} = 0 \tag{12}$$

Al igual que haciamos en la primera parte de la materia, escribamos $\mathbf{E} \cdot \hat{r} = -\frac{\partial \Phi}{\partial r}$. También aprovecho este paso para reemplazar $\mathbf{v} = \omega \times \mathbf{r}$, y asi obtener

$$\sigma \frac{\partial \Phi}{\partial r}\bigg)_{a^-} + \frac{\sigma}{c}(\omega \times \mathbf{r}) \times \mathbf{B} \cdot \hat{r} = 0 \tag{13}$$

Expresando a $\mathbf{r}$ en cartesianas, es decir

$$\mathbf{r} = a\hat{r} = a(\sin\theta\cos\phi\hat{x} + \sin\theta\sin\phi\hat{y} + \cos\theta\hat{z}) \tag{14}$$

y recordando que el campo magnético que contribuye es solo el campo externo $B_0\hat{x}$, podemos masajear la ecuación 13 para obtener

$$\sigma \frac{\partial \Phi}{\partial r}\bigg)_{a^-} + \frac{\sigma \omega B_0 a}{c} \sin\theta\cos\theta\cos\phi = 0 \tag{15}$$

Usando la propuesta para Φ según la ec. 10, tenemos

$$\sum_{lm} A_{lm} Y_{lm}(\theta, \phi) \frac{l}{a^2} = -\frac{\omega B_0 a}{c} \sin\theta\cos\theta\cos\phi \tag{16}$$

Lo clave es notar que la parte angular se puede escribir fácil como combinación lineal de Y_{21} e Y_{2-1}.

$$\sum_{lm} A_{lm} Y_{lm}(\theta, \phi) \frac{l}{a^2} = -\frac{\omega B_0 a}{2c}\sqrt{\frac{8\pi}{15}}[-Y_{21}(\theta, \phi) + Y_{2-1}(\theta, \phi)] \tag{17}$$

De esta expresión podemos notar que solo sobreviven los términos de la sumatoria con $l = 2$ y $m = \pm 1$. Por ejemplo, para A_{21}

$$A_{21} Y_{21}(\theta, \phi) \frac{2}{a^2} = \sqrt{\frac{8\pi}{15}} \frac{\omega B_0 a}{2c} Y_{21}(\theta, \phi) \tag{18}$$

despejando que

$$A_{21} = \sqrt{\frac{8\pi}{15}} \frac{\omega B_0 a^3}{4c} \tag{19}$$

y de la misma manera

$$A_{2-1} = -\sqrt{\frac{8\pi}{15}} \frac{\omega B_0 a^3}{4c} \tag{20}$$

Por lo tanto, podemos escribir nuestro potencial asi:

$$\Phi = \frac{\omega B_0 a^3}{4c} \frac{r_<^2}{r_>^3} \sqrt{\frac{8\pi}{15}} [Y_{21}(\theta, \phi) - Y_{2-1}(\theta, \phi)] \tag{21}$$

Que lo podemos expresar de nuevo como

$$\Phi = -\frac{\omega B_0 a^3}{2c} \frac{r_<^2}{r_>^3} \sin\theta \cos\theta \cos\phi \tag{22}$$

Una vez que llegamos hasta este punto, podemos calcular $\mathbf{E}$ calculando el gradiente de Φ. Como dijimos, este va a ser su valor sólo hasta primer orden en ω. Luego, podemos reemplazar este $\mathbf{E}$ en la ecuación 1 para obtener $\mathbf{J}$ a primer orden en ω. Finalmente, sabiendo las corrientes, podemos calcular el potencial vector $\mathbf{A}$ por el método de la integral de Green

$$\mathbf{A} = \frac{1}{c} \int\int\int \frac{\mathbf{J}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \tag{23}$$

en donde nos convendrá desarrollar la función de Green del espacio libre $\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$ en términos de los armónicos esféricos. Dado que el $\mathbf{J}$ obtenido está desarrollado a primer orden en ω, el $\mathbf{A}$ resultante también lo estará. Y también $\mathbf{B}_{ind} = \nabla \times \mathbf{A}$ quedará expresada hasta ese orden. El campo magnético total dentro de la esfera será entonces $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_{ind}$.

b) Al realizar este cambio de sistema de coordenadas, pasamos a tener un conductor quieto en un campo magnético rotante, con lo cual podemos usar la solución del ejercicio 7. Para les que aún no lo hayan resuelto, tengan en cuenta que está explicado paso a paso en Landau y Lifshitz, Electrodynamics of continuous media, **§59** en la versión en inglés [Depth of penetration of a magnetic field into a conductor] o **§45** [Corrientes de Foucault] en la versión española, a partir de la ec. 45.12.