

Segundo parcial: Ejercicio 1

Fin de década

1. Enunciado

Pseudo esfinter radiante: Antenas en forma de *loop* son comúnmente utilizadas para recepción de señales de radio en la banda AM. Es una propiedad fundamental de las antenas que su patrón direccional de recepción sea idéntico al de emisión.

Consideremos, como modelo simplificado, una espira conductora circular de radio a , la cual es alimentada por una corriente variable $I(t) = I_0 \cos^2(\omega t)$.

1. Qué hipótesis respecto a los datos del problema es necesaria para que sea adecuada una expansión multipolar del campo de radiación?
2. Calcular los campos de radiación \mathbf{E} y \mathbf{B} hasta orden cuadrupolar eléctrico, y graficarlos cualitativamente sobre la superficie de una esfera. Indicar la frecuencia angular de la radiación emitida.
3. Calcular la potencia emitida por unidad de ángulo sólido y graficar su promedio temporal en función de la dirección.
4. Existe una configuración radiante (por no decir *antena*) únicamente con momento dipolar \mathbf{p} no nulo, cuyo patrón de emisión sea idéntico al anterior? Y únicamente con momento cuadrupolar \mathbf{Q} no nulo? Justifique.

Fórmulas útiles:

- Expansión multipolar del campo de radiación:

$$\mathbf{E}_{\text{rad}}(\mathbf{r}, t) = \frac{\hat{\mathbf{r}}}{c^2 r} \times \left[\hat{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{p}} + \ddot{\mathbf{m}} + \frac{1}{6c} \hat{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{D}} \right]_{t-r/c}$$

donde

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2c} \int d^3\mathbf{r} \mathbf{r} \times \mathbf{J}(\mathbf{r})$$

$$\mathbf{D} = \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{Q}$$

$$\mathbf{Q} = \int d^3\mathbf{r} \rho(\mathbf{r}, t) [3\mathbf{r}\mathbf{r} - r^2\mathbf{I}]$$

- El vector de Poynting:

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{B}$$

- Una relación:

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$$

- Una integral, con $a \in \mathbb{Z}$ y $a \neq 0$:

$$\int_0^T dx \cos^2\left(a \frac{2\pi}{T} x\right) = \int_0^T dx \sin^2\left(a \frac{2\pi}{T} x\right) = \frac{T}{2}$$

2. Solución

2.1. Disclaimer

Si bien este apunte intenta ofrecer una resolución al ejercicio del parcial, vale aclarar que **es mucho más extenso y no se espera una discusión tan a fondo**. Por lo tanto, tiene también otro objetivo: ofrecer una explicación detallada y reforzar los puntos conceptuales del tema que hemos discutido en clase. En el parcial se espera que conozcan y puedan argumentar en base a esos conceptos, sin necesariamente pasar por todos los detalles que se presentan aquí.

2.2. Hipótesis respecto a los datos

Antes de empezar, podemos ya definir qué hipótesis respecto a la magnitud de los datos del problema es necesaria para poder utilizar la expansión multipolar. Muchxs han puesto que en un problema de radiación sólo consideramos el campo lejano, de modo que $r \gg a$. Por un lado esto es cierto, pero sólo implica que, al calcular el campo completo, podamos despreciar otros términos que no sean *de radiación* (i.e. que decaigan más rápido que r^{-1}).

Lo importante en la expansión multipolar es recordar que se trata de una aproximación **no relativista**. Tenemos que ver qué implica esto sobre los datos del problema, en particular la escala de tamaño de la fuente, a y la escala de variación temporal de la corriente ω . Una forma de verlo es pensar que el tiempo que tarda la luz en recorrer el radio del anillo (es decir, el tiempo que tarda en viajar la información desde un extremo de la fuente a otro) sea mucho más chico que el tiempo de variación de la corriente. Esto es

$$\begin{aligned}\frac{a}{c} &\ll \frac{1}{\omega} \\ \frac{a\omega}{c} &\ll 1\end{aligned}$$

Esto significa que la comunicación entre dos puntos de la fuente es casi instantánea, de modo que la diferencia entre los tiempos retardados para estos dos puntos sea también muy chica.

Otra forma de verlo, más en la línea que vimos en clase, es pensar cómo tiene que ser la escala de la fuente a en comparación con la longitud de onda de la radiación. Dado que la frecuencia será del orden de ω , ésta será del orden de

$$\lambda \sim \frac{\omega}{c}$$

Según vimos, la expansión multipolar es realmente una expansión en a/λ , donde el orden cero corresponde a la contribución de **p**, y el orden uno a las de **m** y **Q**. Entonces, para que pueda hacerse esta expansión, este factor debe ser el pequeño:

$$\frac{a}{\lambda} \sim \frac{a\omega}{c} \ll 1$$

Esto también quiere decir que la diferencia entre tiempos retardados para distintos puntos de la fuente sea chica respecto a las variaciones propias que pueda tener (su corriente, por ejemplo). Digo que sea *chica*, y no *nula*, porque la expansión (hasta los momentos que consideramos) es a **primer orden** en esta diferencia.

A efectos del parcial (asumo que leerán esto con esa intención), con decir que a/λ sea chico y un poco del por qué era suficiente.

2.3. Campos de radiación

Más allá de las discusiones conceptuales, el desarrollo del ejercicio es masomenos lineal: hay que calcular los momentos multipolares y los campos de radiación con las fórmulas.

2.3.1. Momentos eléctricos

Acá viene uno de los principales puntos puntos de conflicto en las soluciones. En el enunciado no se aclara nada sobre la distribución de carga $\rho(\mathbf{r}', t)$. Frente a las consultas, aclaramos que *inicialmente* el anillo está descargado, pero eso realmente no cambia la solución al problema. Si *inicialmente* tomamos $\rho(\mathbf{r}', t = 0) = 0$,

esto sólo nos dice que los momentos dipolar y cuadrupolar eléctrico serán nulos **a tiempo** $t = 0$, **y no para todo tiempo**. Lo que realmente usamos para calcular el campo de radiación son las derivadas temporales de estos momentos, entonces lo que nos importa realmente es saber cuánto valen $\dot{\rho}$ y $\ddot{\rho}$, y no es obvio que, tratándose de un problema de electrodinámica, la densidad de carga se mantenga constante.

La forma de justificar esto es por el camino de la ecuación de continuidad de la carga. Lo voy a decir ahora y repetir: no hace falta que sepamos la expresión *exacta* para la densidad de corriente \mathbf{J} , ni ahora ni cuando tengamos que hacer la integral. No es difícil obtenerla, pero entran en un terreno pantanoso dependiendo de su habilidad manejando las deltas, así que tal vez mejor evitar un problema.

Qué es entonces lo que deberíamos saber acerca de la densidad de corriente? Por un lado, al ubicar al anillo sobre el plano xy con su centro en el origen, esta corriente debe apuntar en la dirección $\hat{\varphi}$ (como la consideramos acotada al plano xy , da lo mismo pensarlo como versor de cilíndricas o esféricas). Está implícito también (pero vale aclararlo) que la corriente es uniforme a lo largo del anillo, esto es, que \mathbf{J} no dependa de la coordenada φ .

Con esto podemos saber entonces que

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \sim I(t)\hat{\varphi}$$

(si insisten, una expresión exacta es

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = I(t)\delta(r - a)\delta(z)\hat{\varphi}$$

)

La ecuación de continuidad para la carga nos dicta que

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0$$

Como la densidad de corriente sólo tiene componentes en la dirección $\hat{\varphi}$ y no depende de esta coordenada, su divergencia es nula. Esto nos dice entonces que la primera derivada temporal de ρ es idénticamente nula, de modo que sus derivadas también. La conclusión es entonces, según lo discutido anteriormente, que no habrá contribuciones al campo de radiación de los términos con \mathbf{p} y \mathbf{Q} .

2.3.2. Momento dipolar magnético

Vimos entonces que el único término con chances de contribuir al campo de radiación es correspondiente al momento dipolar \mathbf{m} . Se puede calcular de algunas formas, veremos un par aquí.

Forma razonable

Haremos la integral de manera directa, pero nos ahorraremos nuevamente usar la expresión exacta de \mathbf{J} con las deltas y toda la gilada. Como esta densidad de corriente está localizada a una curva (el anillo), basta con usar que podemos reemplazar $d^3\mathbf{r} \mathbf{J}$ y la integración en volumen por $d\ell I(t)\hat{\varphi}$ y una integración sobre la curva

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2c} \int d\ell \mathbf{r}' \times I(t)\hat{\varphi} = \frac{1}{2c} \int_0^{2\pi} a d\varphi a\hat{\rho} \times I(t)\hat{\varphi} = \frac{a^2}{2c} I(t) \int_0^{2\pi} d\varphi \hat{z}$$

tenemos entonces que

$$\mathbf{m} = \frac{\pi a^2}{c} I(t)\hat{z}$$

Alternativa rápida

Podemos tal vez recordar de efetes que el momento magnético de una espira de corriente es simplemente el producto de su corriente por su área, apuntando en la dirección normal al plano de la espira. El área de este *loop* es πa^2 , y la corriente está dada. El único detalle a tener en cuenta es factor c dividiendo, producto del sistema de unidades gaussiano.

De cualquier forma, lo que necesitamos realmente es la segunda derivada de este momento. Como la dependencia temporal está contenida sólo en la corriente (y no en la dirección, por ejemplo), tenemos que

$$\ddot{\mathbf{m}} = \frac{\pi a^2}{c} \ddot{I}(t)\hat{z}$$

Haciendo la derivada, y utilizando la propiedad provista para el coseno del *duplo*, vemos que

$$\ddot{I}(t) = -2\omega^2 I_0 \cos(2\omega t)$$

Parece al pedo, pero escribir la derivada de esta forma nos permite ver luego la frecuencia angular del campo de radiación.

2.3.3. Cálculo del campo

Con todo esto, podemos pasar a usar la fórmula para el campo de radiación. Lo voy a decir ahora y tal vez lo repita: **conviene fuerte usar coordenadas esféricas para toda la cuenta, o al menos el resultado**. Por varias razones:

- Por cómo está construida la expansión multipolar (*i.e.* el $\hat{r} \times$ al principio) los campos siempre quedarán en combinaciones de los versores $\hat{\theta}$ y $\hat{\varphi}$ únicamente.
- Tener el campo \mathbf{E} en la base esférica hace trivial la cuenta para el \mathbf{B} .
- Ídem luego para el cálculo del vector de Poynting.
- A la hora de graficar los campos sobre la esfera, hace también todo más fácil.

Un error *fuerte* que ví en algunos parciales es confundirse al versor \hat{r} . Este es el **versor de esféricas, *i.e.* el versor posición**, y no el de cilíndricas.

En nuestro caso tenemos entonces

$$\mathbf{E}_{\text{rad}}(\mathbf{r}, t) = \frac{\hat{r}}{c^2 r} \times [\ddot{\mathbf{m}}]_{t-r/c}$$

$$\mathbf{E}_{\text{rad}}(\mathbf{r}, t) = \frac{-2\pi a^2 \omega^2 I_0}{c^3 r} \cos(2\omega t_r) (\hat{r} \times \hat{z})$$

Aquí es donde viene el paso crucial: para que quede todo bonito, conviene descomponer el \hat{z} en términos de los versores de esféricas. A saber:

$$\hat{z} = \cos \theta \hat{r} - \sin \theta \hat{\theta}$$

con esto, el producto vectorial queda $\hat{r} \times \hat{z} = -\sin \theta \hat{\varphi}$ y el campo

$$\mathbf{E}_{\text{rad}}(\mathbf{r}, t) = \frac{2\pi a^2 \omega^2 I_0}{c^3 r} \cos(2\omega t_r) \sin \theta \hat{\varphi}$$

El campo magnético será simplemente

$$\mathbf{B}_{\text{rad}}(\mathbf{r}, t) = \hat{r} \times \mathbf{E}_{\text{rad}} = \frac{2\pi a^2 \omega^2 I_0}{c^3 r} \cos(2\omega t_r) \sin \theta (-\hat{\theta})$$

Notemos que aquí ambos campos tienen la dependencia temporal ($\cos(2\omega t_r)$) y en la dirección ($\sin \theta$) desacopladas. Apuntan en una dirección fija (en el sentido de esféricas), y su amplitud está modulada por el factor $\sin \theta$. Su dependencia temporal es armónica, por lo cual tiene sentido asociarle una frecuencia única; vemos que ésta es 2ω . No se sorprendan del factor dos; pues la dependencia temporal de la corriente no es armónica (con el coseno cuadrado), así que la ω no es realmente la *frecuencia* de la fuente. Por otro lado, el factor $\sin \theta$ indica que las amplitudes de campo serán nulas en los polos ($\theta = 0, \pi$) y máximas en el ecuador ($\theta = \pi/2$)

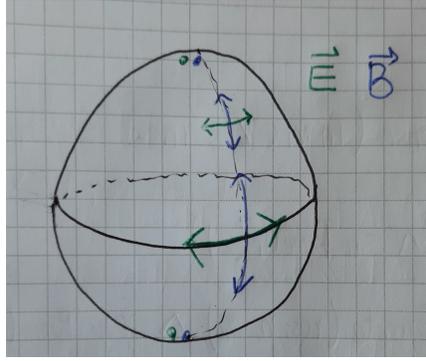


Figura 1: Representación de la amplitud de los campos sobre la esfera

2.4. Potencia radiada

Para calcular la potencia por unidad de ángulo sólido, en función del tiempo, la cuenta es:

$$\frac{dP}{d\Omega}(\theta, \varphi, t) = r^2 \mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{r}}$$

Entendamos el por qué de cada factor. El vector de Poynting, sabemos, apunta hacia donde se dirijan la energía y el momento transportados por los campos. Tomar su proyección en la dirección $\hat{\mathbf{r}}$ nos da cuenta sólo de la energía que se escape hacia el infinito (la que nos interesa considerar como *radiada*). Como los campos de radiación decaen como r^{-1} , el \mathbf{S} contiene una dependencia r^{-2} ; por lo tanto el factor r^2 remueve la dependencia con la distancia de esta magnitud. Esa dependencia ya es obvia para la energía radiada, así que sólo nos interesa considerar la dependencia con la dirección.

Dicho esto, la cuenta es *straightforward*

$$\frac{dP}{d\Omega} = r^2 \frac{c}{4\pi} \left(\frac{2\pi a^2 \omega^2 I_0}{c^3 r} \right)^2 \cos^2(2\omega t_r) \sin^2 \theta (\hat{\boldsymbol{\varphi}} \times -\hat{\boldsymbol{\theta}}) \cdot \hat{\mathbf{r}} = \frac{c}{4\pi} \left(\frac{2\pi a^2 \omega^2 I_0}{c^3} \right)^2 \cos^2(2\omega t_r) \sin^2 \theta$$

Lo que falta ahora es tomar el valor medio temporal de esa expresión. Esto remueve la dependencia temporal

$$\left\langle \frac{dP}{d\Omega} \right\rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{dP}{d\Omega} dt = \frac{c}{4\pi} \left(\frac{2\pi a^2 \omega^2 I_0}{c^3} \right)^2 \sin^2 \theta \times \frac{1}{T} \int_0^T \cos^2(2\omega t_r) dt$$

Para hacer la integral, notemos dos cosas: por más que el argumento del coseno sea $2\omega(t - r/c)$, lo que realmente importa es que sea integrada durante todo un período. Para hacernos la vida más fácil, podemos simplemente descartar el r/c , ya que sólo corresponde a correr el origen del tiempo. Por otro lado, el período T puede ser el que le corresponda a ω ó a 2ω ; la cuenta les dará lo mismo al utilizar la integral de ayuda. Con eso, tenemos entonces

$$\left\langle \frac{dP}{d\Omega} \right\rangle = \frac{c}{4\pi} \left(\frac{2\pi a^2 \omega^2 I_0}{c^3} \right)^2 \sin^2 \theta \times \frac{1}{2}$$

Este promedio temporal de la potencia depende sólo de la dirección (es decir, θ y φ), y es el que podemos representar en el espacio. Este es el *patrón de radiación*. Podemos ver que está también modulado por $\sin^2 \theta$, de modo que es nulo en los polos y máximo en el ecuador; y al no depender de φ tiene simetría de rotación respecto al eje z .

2.5. Otras antenas

2.5.1. Dipolar eléctrico

Se nos pregunta al final si podemos reproducir este patrón de radiación con una antena únicamente con momento dipolar \mathbf{p} no nulo. Para ello, tenemos que pensar qué cosas tuvieron que suceder para que el problema tenga *éste* patrón particular.

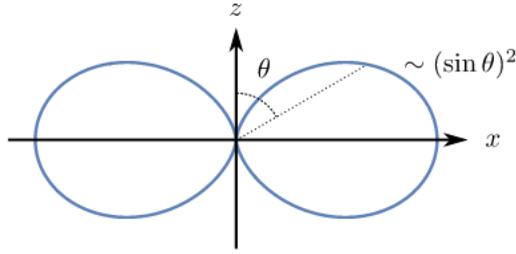


Figura 2: Patrón de radiación para un \mathbf{m} con dirección fija, tomado de un apunte del Dr. Zanella

Por un lado, cuenta con un momento dipolar \mathbf{m} en una dirección fija, con *alguna* dependencia temporal

$$\mathbf{m} = f(t)\hat{\mathbf{z}}$$

Esto hace que el campo eléctrico generado sea

$$\mathbf{E} \sim \ddot{f}(t) (\hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{z}}) \sim \ddot{f}(t) \sin \theta \hat{\boldsymbol{\varphi}}$$

junto con el magnético

$$\mathbf{B} \sim \ddot{f}(t) \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}}$$

Ambos comparten la modulación $\sin \theta$, donde θ es el ángulo entre \mathbf{m} y $\hat{\mathbf{r}}$, y es esa modulación la responsable del $\sin^2 \theta$ en el patrón de potencia. **Este es el patrón de un campo de radiación dipolar**; veremos que también se logra con un momento dipolar eléctrico \mathbf{p} .

Planteemos ahora una fuente únicamente con momento dipolar eléctrico en una dirección fija (por ejemplo, $\hat{\mathbf{z}}$)

$$\mathbf{p} = f(t)\hat{\mathbf{z}}$$

El campo eléctrico de radiación quedará según

$$\mathbf{E} \sim \hat{\mathbf{r}} \times \left\{ \ddot{f}(t) (\hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{z}}) \right\} \sim \ddot{f}(t) \hat{\mathbf{r}} \times (\sin \theta \hat{\boldsymbol{\varphi}}) \sim \ddot{f}(t) \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}}$$

Como $\hat{\mathbf{r}}$ y $\hat{\boldsymbol{\varphi}}$ ya son perpendiculares, no se agregan más factores al $\sin \theta$; lo mismo para el campo magnético

$$\mathbf{B} \sim \ddot{f}(t) \sin \theta \hat{\boldsymbol{\varphi}}$$

Vemos entonces que al calcular el vector de Poynting para obtener el patrón de potencia, nuevamente aparece el factor $\sin^2 \theta$ como modulación. No obstante, las direcciones de los campos \mathbf{E} y \mathbf{B} son ortogonales a las del ejercicio. La conclusión es la siguiente: **con un momento dipolar \mathbf{p} orientado en la misma dirección que el momento \mathbf{m} , podemos obtener el mismo patrón de radiación para la potencia; pero la polarización de los campos se invierte.**

2.5.2. Cuadrupolar eléctrico

Qué hay entonces de una antena únicamente con momento cuadrupolar \mathbf{Q} ? No es muy fácil verlo, pero imaginemos que tenemos una fuente únicamente con Q_{zz} no nulo. En forma de díada, se puede escribir

$$\mathbf{Q} = \hat{\mathbf{z}}Q_{zz}\hat{\mathbf{z}}$$

Con esto, el campo de radiación quedará según

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &\sim \hat{\mathbf{r}} \times \left\{ \hat{\mathbf{r}} \times [\hat{\mathbf{r}} \cdot \ddot{\mathbf{Q}}] \right\} \\ &\sim \hat{\mathbf{r}} \times \left\{ \hat{\mathbf{r}} \times [\hat{\mathbf{r}} \cdot (\hat{\mathbf{z}}\ddot{Q}_{zz}\hat{\mathbf{z}})] \right\} \\ &\sim \hat{\mathbf{r}} \times [\ddot{Q}_{zz} (\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{z}}) (\hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{z}})] \end{aligned}$$

Vemos aquí que aparecen ambos productos escalar y vectorial entre \hat{r} y \hat{z} . Esto nos introduce, respectivamente, factores $\cos \theta$ y $\sin \theta$ (como el resultado $(\hat{r} \times \hat{z})$ ya es perpendicular a \hat{r} , el producto vectorial más externo no introduce nuevos factores).

El producto entre estos factores, para cada campo E y B, se puede escribir como

$$\cos \theta \sin \theta = \frac{1}{2} \sin (2\theta)$$

de modo que el perfil de potencia estará modulado por un factor $\sin^2 (2\theta)$. Esta es justamente la modulación que vimos con el esfinter radiante original! Este patrón de radiación exhibe al menos dos direcciones en las cuales es máximo, en contraste con el dipolar (que sólo es máximo en el ecuador). Podemos ver esto en la figura para un par de ejemplos de **Q**

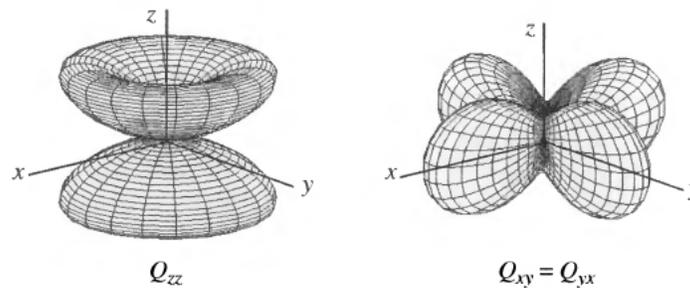


Figura 3: Patrón de radiación cuadrupolar, tomado del Zangwill

La conclusión es entonces **que no es posible reproducir el patrón del ejercicio con una fuente cuadrupolar, ya que tiene lóbulos de más.**