Ejercicio 3

Debemos escribir el campo electromagnético de una partícula que se mueve a velocidad constante $\mathbf{v} = v\hat{\boldsymbol{z}}$ y que a $t = 0$ está en el origen. Si la trayectoria de la partícula hubiera sido cualquier otra (con $\mathbf{v}(t)$ arbitrario) el problema hubiera sido más complicado. Pero siendo la velocidad constante, el problema se vuele sencillo. Esto es porque el sistema de referencia en el que la partícula está quieta (llamemosló S') es un sistema de referencia inercial. En S', con coordenadas x', y', z' el campo electromagnético es el de una partícula en reposo en el origen y es sencillamente

$$\mathbf{E}' = e\frac{(x', y', z')}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{3/2}}, \qquad \mathbf{B}' = 0 \tag{1}$$

En el sistema de referencia S tendremos a la partícula moviendose con $\mathbf{v} = v\hat{\boldsymbol{z}}$. La relación entre un sistema de referencia y otro será un boost de Lorentz de la forma

$$ct' = \gamma(ct - \beta z), \quad z' = \gamma(z - \beta ct), \quad x' = x, \quad y' = y \tag{2}$$

con $\beta = v/c$ y $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$. La manera de asegurarnos que este es el boost correcto es observar que la transformación de las velocidades es

$$u'_x = \frac{u_x}{\gamma(1 - \frac{u_z v}{c^2})}, \quad u'_y = \frac{u_y}{\gamma(1 - \frac{u_z v}{c^2})}, \quad u'_z = \frac{u_z - v}{(1 - \frac{u_z v}{c^2})} \tag{3}$$

de manera que $\mathbf{u}' = 0$ en S' implica $\mathbf{u} = v\hat{\boldsymbol{z}}$ en S. La inversa de la transformación (2) es

$$ct = \gamma(ct' + \beta z'), \quad z = \gamma(z' + \beta ct'), \quad x = x', \quad y = y' \tag{4}$$

y por lo tanto la relación entre los campos en S y S' estará dada por

$$\mathbf{E} = \gamma(\mathbf{E}' + \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B}') - \frac{(\gamma - 1)}{\beta^2}(\boldsymbol{\beta}.\mathbf{E}')\boldsymbol{\beta}, \quad \mathbf{B} = \gamma(\mathbf{B}' - \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E}') - \frac{(\gamma - 1)}{\beta^2}(\boldsymbol{\beta}.\mathbf{B}')\boldsymbol{\beta}, \qquad \text{con} \quad \boldsymbol{\beta} = -v\hat{\boldsymbol{z}} \tag{5}$$

es decir

$$\mathbf{E} = \gamma\mathbf{E}' + (1 - \gamma)E'_z\hat{\boldsymbol{z}}, \qquad \mathbf{B} = \gamma\beta\, \hat{\boldsymbol{z}} \times \mathbf{E}' \tag{6}$$

Explícitamente usando (1)

$$\mathbf{E} = e\frac{(\gamma\, x', \gamma\, y', z')}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{3/2}}, \quad \mathbf{B} = \frac{e\gamma v}{c}\frac{(-y', x', 0)}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{3/2}} \tag{7}$$

IMPORTANTE PORQUE FUE UN ERROR ABUNDANTE: Está claro que esa no es la respuesta final, porque tenemos los campos en el sistema S (el que nos interesaba calcular) pero escrito en las coordenadas de S' (que fueron coordenadas auxiliares a nuestro problema). Por eso, debemos sustituir las relaciones entre coordenadas (2) en los campos. Así obtenemos

$$\boxed{\mathbf{E} = e\gamma\frac{(x, y, z - vt)}{(x^2 + y^2 + \gamma^2(z - vt)^2)^{3/2}}, \quad \mathbf{B} = \frac{e\gamma v}{c}\frac{(-y, x, 0)}{(x^2 + y^2 + \gamma^2(z - vt)^2)^{3/2}}} \tag{8}$$

Muchos cometieron el error de trabajar en coordenadas esféricas. El problema es que si bien es posible hacerlo, las tranformaciones de las coordenadas esféricas y sus versores ante transformaciones de Lorentz es un problema no-lineal que complica toda la cuenta. Dado que el boost es lineal en coordenadas cartesianas, más vale trabajar en coordenadas cartesianas.

Teniendo ya la solución en S, y si uno lo deseara para interpretar mejor, a partir de (8) podemos implementar coordenadas cilíndricas $\{\rho, \varphi, z\}$ para escribir la solución

$$\mathbf{E} = e\gamma\frac{\rho\hat{\boldsymbol{\rho}} + (z - vt)\hat{\boldsymbol{z}}}{(\rho^2 + \gamma^2(z - vt)^2)^{3/2}}, \quad \mathbf{B} = \frac{e\gamma v}{c}\frac{\rho\hat{\boldsymbol{\varphi}}}{(\rho^2 + \gamma^2(z - vt)^2)^{3/2}} \tag{9}$$

esto a su vez facilita el cálculo de $\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi}\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ (se puede también calcular más "artesanalmente" a partir de (8))

$$\mathbf{S} = \frac{e^2\gamma^2 v}{4\pi}\,\frac{\rho^2\hat{\boldsymbol{z}} - \rho(z - vt)\hat{\boldsymbol{\rho}}}{(\rho^2 + \gamma^2(z - vt)^2)^3} \tag{10}$$

que en el plano transversal a la trayectoria $(z = vt)$ se vuelve

$$\boxed{\mathbf{S}|_{z=vt} = \frac{e^2 v\hat{\boldsymbol{z}}}{4\pi(1-\frac{v^2}{c^2})\rho^4}} \tag{11}$$

En cuanto a la pregunta sobre potencia que radía, ¡LA PARTÍCULA NO RADÍA PORQUE SE MUEVE A VELOCIDAD CONSTANTE!

Por último el ejercicio nos pide calcular el flujo del campo eléctrico sobre una cáscara esférica de radio arbitrario (R) centrada en la posición de la partícula. La partícula se sitúa en $(0,0,vt)$, por esto definimos las variables centradas en la posición de la partícula $\mathbf{r} = (r_1, r_2, r_3)$ tal que $\mathbf{r} = \mathbf{x} - (0,0,vt)$. El campo eléctrico en estas variables es

$$\mathbf{E} = e\gamma \frac{\mathbf{r}}{(r_1^2 + r_2^2 + \gamma^2 r_3^2)^{3/2}} \tag{12}$$

Como queremos calcular el flujo a través de una cáscara esférica de radio R, implementamos $r_1 = R\cos\phi\sin\theta$, $r_2 = R\sin\phi\sin\theta$ y $r_3 = R\cos\theta$. El campo sobre la superficie queda

$$\mathbf{E}|_{sup} = e\gamma \frac{R\,\hat{\boldsymbol{r}}}{(R^2\sin^2\theta + \gamma^2 R^2\cos^2\theta)^{3/2}} \tag{13}$$

El elemento de superficie será $d\mathbf{S} = \hat{\boldsymbol{r}}R^2\sin\theta d\theta d\phi$; obtenemos entonces

$$\oiint \mathbf{E}.d\mathbf{S} = 2\pi e\gamma \int_0^\pi \frac{d\theta\sin\theta}{(\sin^2\theta + \gamma^2\cos^2\theta)^{3/2}} \tag{14}$$

donde la integral en ϕ produjo un 2π trivial. Para llevar esta integral a la forma de la ayuda transformamos el seno del denominador con $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$ y así usamos la ayuda

$$\int_0^\pi \frac{d\theta\sin\theta}{(\sin^2\theta + \gamma^2\cos^2\theta)^{3/2}} = \int_0^\pi \frac{d\theta\sin\theta}{(1 + (\gamma^2 - 1)\cos^2\theta)^{3/2}} = \frac{2}{\sqrt{1+\gamma^2-1}} = \frac{2}{\gamma} \tag{15}$$

así que

$$\boxed{\oiint \mathbf{E}.d\mathbf{S} = 4\pi e} \tag{16}$$

que es lo que debe ser por la ley de Gauss!