Ejercicio 2 del segundo parcial

a) Para el sistema de Alice, el conductor está quieto, con lo cual podemos aplicar lo que sabemos del ejercicio 7 de la guía 6. El campo eléctrico (teniendo en cuenta tanto su amplitud como su fase) debe ser contínuo en la interfaz vacío-conductor. Para poder garantizar que esa condición valga para todo tiempo, debe cumplirse que las frecuencias incidente, reflejada y transmitida sean todas iguales; y para garantizar que la condición valga para todo x y para todo y (dado que la interfaz es el plano xy), debe cumplirse que las ondas incidente, reflejada y transmitida tengan igual k_x e igual k_y. A partir de esto concluímos que $\omega_r = \omega_i$; y como $k_x = k_y = 0$ para la onda incidente, también deben ser cero para la onda reflejada, con lo cual la onda reflejada también apunta en $\hat{z}$ y $\theta_r = 0$.

Podemos expresar toda esta información en términos de un cuadrivecto de onda k_r^μ

$$k_r^\mu = (\omega_i/c, 0, 0, \omega/c) \tag{1}$$

y boostearlo para poder caracterizar esta onda en el sistema de Bob. El sistema de referencia que vea a Bob quieto será aquel que se mueva a la misma velocidad que él. Por eso, el boost que realizamos será con $\beta = +v/c\hat{y}$, obteniendo

$$k_r^{\mu\prime} = (\gamma\omega_i/c, 0, -\beta\gamma\omega_i/c, \omega/c) \tag{2}$$

Ahora podemos inspeccionar este cuadrivector para extraer la información que necesitamos. La primera coordenada la podemos identificar como ω_r'/c, con lo cual $\omega_r' = \gamma\omega_i$. La tercer componente la podemos identificar como $\frac{\omega_r'}{c} sin(\theta_r')$, por lo tanto

$$\frac{\omega_r'}{c} sin(\theta_r') = -\beta\gamma\frac{\omega_i}{c} \tag{3}$$

$$\frac{\gamma\omega_i}{c} sin(\theta_r') = -\beta\gamma\frac{\omega_i}{c} \tag{4}$$

$$\sin(\theta_r') = -\beta \tag{5}$$

Alternativamente, se podía hacer algo similar identificando la tercer coordenada como $\frac{\omega_r'}{c} cos(\theta_r')$, obteniendo que

$$cos(\theta_r') = 1/\gamma \tag{6}$$

b) Empezamos por el sistema de Alice ya que en este el conductor está quieto, y estamos en terreno más conocido. Acá es cuando empezamos a usar de verdad lo que vimos del ejercicio 7 de la guía 6. Me tomo la licencia de invocar la conclusión a la que llegamos en ese ejercicio, que es que podemos hacer las cuentas de la misma forma que hacíamos cuando teníamos interfaces entre dieléctricos, si tomamos al "indice de refracción" del conductor como

$$n = \frac{c}{\omega}\frac{1+i}{\delta} = (1+i)\sqrt{\frac{2\pi\sigma}{\omega}} \tag{7}$$

Como ya dijimos antes, k_x y k_y de la onda incidente deberan ser los mismos tanto para la onda reflejada como la transmitida, con lo cual sabemos que la onda transmitida también tendrá únicamente componente en $\hat{z}$ y por ende que $mathbfk_t$ será normal a la interfaz. Pero también se puede ver con la ley de Snell

$$n.sin(\theta_t) = sin(\theta_i) = 0 \tag{8}$$

Por otra parte sabemos que el módulo de $\mathbf{k_t}$ es $k_t = n\frac{\omega}{c}$ con lo cual $\mathbf{k_t} = \pm\frac{1+i}{\delta}\hat{z}$. En este caso nos quedamos con el signo $-$ ya que al evaluarlo en la fase $e^{\mathbf{k_t}\cdot\mathbf{r}} = e^{-iz/\delta}e^{z/\delta}$, vemos que esta no diverge en $z \to -\infty$ (recordar que este conductor está en la región con $z \in (-\infty, 0]$).

Es útil escribir el cuadrivector de onda transmitido en el sistema de Alice, para luego boostearlo y obtener el del sistema de Bob. En el sistema de Alice

$$\mathbf{k_t}^{\mu} = (\frac{\omega_i}{c}, 0, 0, -\frac{1+i}{\delta}) \tag{9}$$

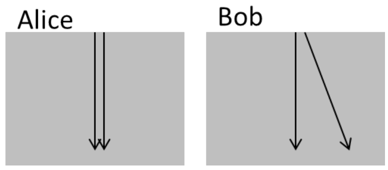
Y al boostearlo al sistema de Bob queda

$$\mathbf{k_t}^{\mu\prime} = (\gamma\frac{\omega_i}{c}, 0, -\gamma\beta\frac{\omega_i}{c}, -\frac{1+i}{\delta}) \tag{10}$$

Podemos escribir el vector de onda transmitido en el sistema de Bob explícitamente como un vector real más un vector imaginario.

$$\mathbf{k_t}' = (0, -\gamma\beta\frac{\omega}{c}, -\frac{1}{\delta}) + i(0, 0, -\frac{1}{\delta}) \tag{11}$$

El vector real indica la dirección de propagación, y el imaginario la dirección de atenuación. Podemos observar que para Alice, estas direcciones coinciden, pero no para Bob, quien ve que la propagación es oblícula pero la atenuación es normal a la interfaz.



c) Recordemos que para Alice vale lo que vimos en el problema 7, en el cual concluimos que las cuentas con un conductor real eran iguales a las de un medio dieléctrico si consideramos que $n = \frac{c}{\omega}\frac{1+i}{\delta}$. Ahora entonces voy a invocar el resultado del problema 1 de la guía 6, en donde para modo TE

$$E_t = \frac{2n_1 cos(\theta_i)}{n_1 cos(\theta_i) + n_2 cos(\theta_t)} E_i \tag{12}$$

Para Alice, dado que $sin(\theta_t) = 0$ vale que $cos(\theta_t) = 1$ al igual que ocurre para la onda incidente, y dado que la onda incide desde el vacío hacia el conductor $n_1 = 1$ y $n_2 = \frac{1+i}{\delta}$.

$$\mathbf{E_t} = \frac{2}{1 + \frac{1+i}{\delta}} E_i \hat{x} \tag{13}$$

Si quisiéramos tener también la amplitud del campo magnético podemos obtenerla a partir de $\mathbf{B_t} = n\hat{\mathbf{k}}_\mathbf{t} \times \mathbf{E_t}$, siendo

$$\mathbf{B_t} = -\frac{\frac{2+2i}{\delta}}{1 + \frac{1+i}{\delta}} E_i \hat{y} \tag{14}$$

Recordemos que estas son solo las amplitudes, pero el ejercicio pide el campo eléctrico completo, con lo cual habría que incluir su fase, y TOMAR LA PARTE REAL del campo completo.

$$\mathbf{E_t} = Re\left\{\frac{2}{1 + \frac{1+i}{\delta}} E_i e^{-i\omega/cz - i\omega t}\right\} \hat{x} \tag{15}$$

Finalmente si queremos $\mathbf{J}$ en este sistema podemos aplicar la ley de Ohm para conductores quietos, y simplemente multiplicar a $\mathbf{E_t}$ por σ.

Para obtener $\mathbf{E_t}$ en el sistema de Bob, basta con transformar los campos calculados para el sistema de Alice. Esta cuenta resulta especialmente simple ya que $\mathbf{E}$ es completamente perpendicular al boost, y $\mathbf{B}$ es completamente paralelo, resultando en

$$\mathbf{E_t'} = \gamma Re\left\{\frac{2}{1+\frac{1+i}{\delta}}E_i e^{-i\omega/cz - i\omega t}\right\}\hat{x} \tag{16}$$

Notar que dejé la misma fase que estaba escrita para el sistema de Alice. Esto se debe a que pese a que tanto k_μ como x^μ cambien al pasar de un sistema al otro, el exponente $k_\mu x^\mu$ es invariante. De no ser asi, hubiera sido necesario transformar también las coordenadas de los campos, como ocurrió en el ejercicio 3 del parcial.

Ojo al piojo, que en el sistema de Bob no pueden usar tan felizmente la ley de Ohm, ya que él ve al sistema en movimiento. Lo recomendable entonces era transformar la cuadricorriente del sistema de Alice al sistema de Bob. En el sistema de Alice (dado que no hay densidad volumétrica de carga dentro del conductor)

$$J^\mu = (0, \sigma E_t, 0, 0) \tag{17}$$

Notar que la única componente no nula es perpendicular a la dirección del boost $\beta = \frac{v}{c}\hat{y}$, con lo cual el cuadrivector no cambiará al transformarlo al otro sistema de referencia. En efecto, la corriente en el sistema de Bob

$$J^{\mu\prime} = J^\mu = (0, \sigma E_t, 0, 0) \tag{18}$$