Física Teórica 2

Primer cuatrimestre de 2018

Guía 1: Sistemas de dimensión 2

1. El estado de polarización de un fotón se puede describir por un vector en un espacio vectorial complejo de dimensión 2. En él se pueden definir las bases $\{|x\rangle, |y\rangle\}$, $\{|x'\rangle, |y'\rangle\}$ y $\{|R\rangle, |L\rangle\}$, correspondientes a polarización lineal en x y y, polarización lineal en x' y y' y polarización circular. Los productos de dichas bases están en la siguiente tabla (por ejemplo $\langle y|R\rangle = i/\sqrt{2}$):

	$\|x\rangle$	$\|y\rangle$	$\|x'\rangle$	$\|y'\rangle$	$\|R\rangle$	$\|L\rangle$
$\langle x\|$	1	0	$\cos\theta$	$-\sin\theta$	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$
$\langle y\|$		1	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$i/\sqrt{2}$	$-i/\sqrt{2}$
$\langle x'\|$			1	0	$e^{i\theta}/\sqrt{2}$	$e^{-i\theta}/\sqrt{2}$
$\langle y'\|$				1	$ie^{i\theta}/\sqrt{2}$	$-ie^{-i\theta}/\sqrt{2}$
$\langle R\|$					1	0
$\langle L\|$						1

   a) Muestre que el estado $|\psi\rangle = \frac{(1+i)}{2}|R\rangle + \frac{(1-i)}{2}|L\rangle$ tiene polarización lineal de las siguientes maneras:
      i) Multiplique por $\langle x'|$ y encuentre para qué valor de θ, $\langle x'|\psi\rangle = 1$.
      ii) Utilizando la matriz cambio de base, escriba $|\psi\rangle$ en la base $\{|x\rangle, |y\rangle\}$.

   b) A partir de la relación de completitud de la base $\{|x\rangle, |y\rangle\}$, verifique la de $\{|x'\rangle, |y'\rangle\}$ y $\{|R\rangle, |L\rangle\}$.

   c) Definimos el operador rotación mediante: $|x'\rangle = \hat{R}(\theta)|x\rangle$, $|y'\rangle = \hat{R}(\theta)|y\rangle$.
      i) Escriba la representación matricial de $\{|x'\rangle, |y'\rangle\}$, $\{|R\rangle, |L\rangle\}$, y $\hat{R}(\theta)$ en la base $\{|x\rangle, |y\rangle\}$.
      ii) Encuentre los autoestados y autovalores de $\hat{R}(\theta)$ y escriba su descomposición espectral.
      iii) Aplicando $\hat{R}(\pi/2)$ en su forma de descomposición espectral sobre $|x'\rangle$ muestre que obtiene $|y'\rangle$.

2. Para un estado arbitrario $|\psi\rangle$ diga cuáles de las siguientes propiedades son ciertas siempre, a veces o nunca. Además, diga cuales dependen de como se elige el factor arbitrario de fase.

   a) $|\langle x|\psi\rangle|^2 + |\langle y|\psi\rangle|^2 = 1$.
   b) $\langle x|\psi\rangle$ es real.
   c) $\langle x|\psi\rangle$ y $\langle x'|\psi\rangle$ son reales.
   d) $\langle x|\psi\rangle$ y $\langle R|\psi\rangle$ son reales.
   e) Existe un $|\phi\rangle$ tal que $\langle\phi|\psi\rangle = 0$.
   f) $|\langle x|\psi\rangle|^2 + |\langle R|\psi\rangle|^2 = 1$.
   g) Si $|\langle x|\psi\rangle|^2 = |\langle\psi|\psi\rangle|^2$, entonces $|\langle x'|\psi\rangle|^2 = 1/2$ para todo θ.

Interprete los que pueda en término de los experimentos de polarización y cristales birrefringentes.

3. Sea x' un eje orientado en $\theta = 30°$ respecto a x, y un haz de fotones orientados en un estado de polarización lineal ψ tal que $|\langle y|\psi\rangle| = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

   a) Se hace pasar el haz por los siguientes 3 proyectores:

   $$\text{Detector} \quad \leftarrow y' \quad \leftarrow R \quad \leftarrow y \quad \leftarrow \psi$$

   Calcular la probabilidad de transmisión.

   b) Repetir el cálculo si se invierten las direcciones:

   $$\text{Detector} \quad \leftarrow y \quad \leftarrow R \quad \leftarrow y' \quad \leftarrow \psi$$

   c) Repetir los cálculos si se reemplazan los polarizadores R por polarizadores L.

4. Sea un haz con N fotones por segundo descriptos por el siguiente estado de polarización:

   $$|\psi\rangle = c\,(3\,|x\rangle + 4i\,|y\rangle)$$

   a) ¿Qué fracción de los fotones pasarán en promedio por un polarizador y?

   b) ¿Qué fracción de los fotones pasarán en promedio por un polarizador x' (orientado en un ángulo θ respecto a x)?

   c) Cuando un fotón está polarizado en R lleva un momento angular $\hbar$ respecto de su dirección de movimiento. Si su polarización es L posee el mismo momento angular, pero orientado en la dirección opuesta. Si el haz descripto por el estado ψ es absorbido totalmente por una superficie, ¿qué torque se ejercerá sobre la misma?

   d) ¿Qué se observa cuando se envía un solo fotón y éste es absorbido por la superficie (suponiendo que tiene un instrumento suficientemente delicado para medirlo)?

5. En un espacio vectorial de dimensión 2 considere los operadores $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$, que en la base ortonormal $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ con

   $$|+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad |-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

   se representan mediante las matrices

   $$\sigma_x = \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

   Estas tres matrices se conocen como *matrices de Pauli.*

   a) ¿Son hermíticas estas matrices? Halle sus autovalores y autovectores en esta base.

   b) Verifique que se satisfacen las siguientes propiedades

   $$\begin{aligned} \det(\sigma_k) &= -1 \\ \mathrm{tr}(\sigma_k) &= 0 \\ \sigma_i^2 &= \mathbb{I} \\ \sigma_j\sigma_k &= i\epsilon_{jkl}\sigma_l + \mathbb{I}\delta_{jk}\ , \end{aligned}$$

   donde $\mathbb{I}$ representa a la matriz identidad, $k = 1, 2, 3$ ($\equiv x, y, z$), ϵ_{ijk} es la densidad tensorial de Levi-Civita y δ_{ij} es la delta de Kronecker.

6. Suponga una matriz de 2×2 X que se escribe en la forma

$$X = a_0 + \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{a}$$

donde a_0 y $a_{1,2,3}$ son números, y $\boldsymbol{\sigma} \equiv (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$.

   a) ¿Cómo se relacionan los a_k $(k = 0, 1, 2, 3)$ con $\mathrm{tr}(X)$ y $\mathrm{tr}(\sigma_k X)$?

   b) Obtenga a_0 y a_k en término de los elementos de matriz X_{ij}. Muestre que cualquier matriz hermítica de 2×2 X se puede escribir en esta forma.

7. El operador impulso angular en dirección z es

$$L_z = \hbar\Big(|R\rangle\langle R| - |L\rangle\langle L| \Big)$$

   a) Encuentre sus autovalores y autovectores, y muestre su representación matricial en la base $\{|x\rangle, |y\rangle\}$ es $\hbar\sigma_y$.

   b) Muestre usando la representación espectral que $\hat{R}(\theta) = \exp\big(\frac{-i\theta L_z}{\hbar}\big)$.

   c) Muestre usando la representación en la base $\{|x\rangle, |y\rangle\}$ que $\hat{R}(\theta) = \mathbb{I}\cos\theta - i\frac{L_z}{\hbar}\sin\theta$.

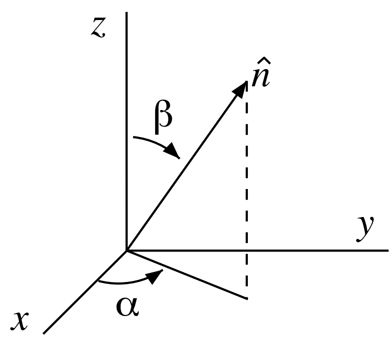
   d) Muestre que $\hat{L}_z$ es hermítico y $\hat{R}(\theta)$ unitario (use la representación matricial y la descomposición espectral).

8. Los estados $|+\rangle$ y $|-\rangle$ son autoestados de la componente z del espín S_z con autovalor $\pm\hbar/2$. Diga cómo actúan los operadores S_x y S_y sobre estos dos estados. Muestre que en esa base los operadores de espín se relacionan con las matrices de Pauli por: $S_i = \frac{\hbar}{2}\sigma_i$. Verifique que $[S_i, S_j] = i\epsilon_{ijk}\hbar S_k$ y $\{S_i, S_j\} = (\hbar^2/2)\delta_{ij}$.

9. Construya $|\boldsymbol{S} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}; +\rangle$ tal que

$$\boldsymbol{S} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} \; |\boldsymbol{S} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}; +\rangle = \frac{\hbar}{2} \; |\boldsymbol{S} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}; +\rangle$$

donde $\hat{\boldsymbol{n}}$ está caracterizado por los ángulos que se muestran en la figura. Exprese su respuesta como una combinación lineal de $|+\rangle$ y $|-\rangle$.



(Nota: la respuesta es

$$\cos(\beta/2)\,|+\rangle + e^{i\alpha}\sin(\beta/2)\,|-\rangle \; .$$

En lugar de verificar que esta respuesta satisface la ecuación de autovalores de arriba, considere al problema como un problema de autovalores.)

10. Un sistema de dos niveles está caracterizado por el Hamiltoniano

$$H = H_{11} \, |1\rangle\langle 1| + H_{22} \, |2\rangle\langle 2| + H_{12} \left(|1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 1| \right)$$

donde H_{11}, H_{22}, H_{12} son números reales con dimensiones de energía y $|1\rangle$ y $|2\rangle$ son autoestados de algún observable (distinto de H). Encuentre los autoestados de energía y los correspondientes autovalores. Asegúrese de que su respuesta tenga sentido en el caso $H_{12} = 0$.

11. Un sistema de espín 1/2 está en un autoestado de $\boldsymbol{S} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}$ con autovalor $\hbar/2$, donde $\hat{\boldsymbol{n}}$ es un vector unitario en el plano xz que forma un ángulo γ con el eje positivo z.

    a) Suponga que se mide S_x. ¿Cuál es la probabilidad de obtener $\hbar/2$?

    b) Evalúe la dispersión de S_x, es decir $\left\langle (S_x - \langle S_x \rangle)^2 \right\rangle$. Verifique el resultado para los casos $\gamma = 0, \pi/2, \pi$.

12. Un haz de átomos de espín 1/2 es sometido a una serie de mediciones del tipo Stern–Gerlach en la siguiente manera:

    a) La primera medición acepta átomos con $s_z = \hbar/2$ y rechaza átomos con $s_z = -\hbar/2$.

    b) La segunda medición acepta átomos con $s_n = \hbar/2$ y rechaza con $s_n = -\hbar/2$, donde s_n es el autovalor del operador $\boldsymbol{S} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}$ con $\hat{\boldsymbol{n}}$ en el plano xz y formando un ángulo β con el eje z.

    c) Una tercera medición acepta $s_z = -\hbar/2$ y rechaza $s_z = \hbar/2$.

    ¿Cuál es la intensidad del haz final $s_z = -\hbar/2$ si el haz $s_z = \hbar/2$ que pasa la primer medición esta normalizado a uno? ¿Cómo se debe orientar el segundo aparato de medición para maximizar la intensidad del haz final $s_z = -\hbar/2$?

13. Dada la matriz

$$J = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

    a) Pruebe que J es unitaria y halle J^{-1}.

    b) Aplique la transformación $B = JAJ^{-1}$ a una matriz simétrica y verifique que: (i) B es simétrica, (ii) $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(B)$.

    c) Dada una matriz A simétrica, halle θ de modo que B resulte ser diagonal.