Física Teórica 2

Primer cuatrimestre de 2018

Guía 2: Formalismo: estados cuánticos, operadores, espectros discretos y continuos

Parte I: Espacios de dimensión finita. El caso discreto.

1. Suponga que $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$ y $\{|\alpha\rangle, |\beta\rangle, |\gamma\rangle\}$ son dos bases ortonormales.

   a) Considere $|u\rangle = |\alpha\rangle - i\,|\beta\rangle$ y $|v\rangle = i\,|\alpha\rangle + |\beta\rangle$. ¿Cuánto vale $\langle u|v\rangle$? ¿Son ortogonales?

   b) Sea $|k\rangle = \sum_{i=1}^{3} a_{ki}\,|i\rangle$, con $k = \alpha, \beta, \gamma$. ¿Qué condiciones deben satisfacer los coeficientes a_{ki}? ¿Cuánto valen $\langle 2|\beta\rangle$ y $\langle \alpha|3\rangle$?

   c) Escriba $|u\rangle$ y $|v\rangle$ en la base $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$ y calcule nuevamente $\langle u|v\rangle$. Compare con el resultado obtenido en a).

2. Usando las reglas del álgebra de bra-ket, pruebe o evalúe los siguientes ítems:

   a) $\mathrm{tr}(XY) = \mathrm{tr}(YX)$ y $\mathrm{tr}(XYZ) = \mathrm{tr}(ZXY)$, donde X, Y y Z son operadores.

   b) $(XY)^\dagger = Y^\dagger X^\dagger$.

   c) Calcule $g(A)$ en forma de ket-bra, donde A es un operador hermítico cuyos autovalores y atuovectores son conocidos y g es una función tal que admite un desarrollo en series de potencias.

3. *a*) Considere dos kets $|\alpha\rangle$ y $|\beta\rangle$. Suponga que $\langle a_1|\alpha\rangle, \langle a_2|\alpha\rangle, \ldots$ y $\langle a_1|\beta\rangle, \langle a_2|\beta\rangle, \ldots$ son todos conocidos, donde $\{|a_1\rangle, |a_2\rangle, \ldots\}$ forman un conjunto completo de kets base. Encuentre la representación matricial del operador $|\alpha\rangle\langle\beta|$ en esta base.

   b) Considere ahora un sistema de espín 1/2 y sean $|\alpha\rangle$ y $|\beta\rangle$ iguales a $|s_z = \hbar/2\rangle$ y $|s_x = \hbar/2\rangle$ respectivamente. Escriba explícitamente la matriz cuadrada que corresponde a $|\alpha\rangle\langle\beta|$ en la base usual (s_z diagonal).

4. Suponga que $|i\rangle$ y $|j\rangle$ son autoestados de algún operador hermítico A. ¿Bajo qué condiciones se puede concluir que $|i\rangle + |j\rangle$ también es autoestado de A? Justifique.

5. Considere un espacio de kets generado por los autokets $\{|a_i\rangle\}$ de un operador hermítico A. No hay degeneración.

   a) Pruebe que
   $$\prod_i (A - a_i)$$
   es el operador nulo.

   b) Para un j fijo, ¿cuál es el significado del operador
   $$\prod_{i \neq j} \frac{(A - a_i)}{(a_j - a_i)} \quad ?$$

   c) Ilustre los dos puntos anteriores usando $A = S_z$ de un sistema de espín 1/2.

6. Un cierto observable en mecánica cuántica tiene una representación matricial de 3×3 como sigue

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   a) Encuentre los autovectores normalizados de este observable y los correspondientes autovalores. ¿Hay degeneración?

   b) Dé un ejemplo físico donde todo esto sea relevante.

7. Sean A y B dos observables tales que admiten una base completa ortonormal de autovectores simultáneos de A y B, $\{|a_i, b_i\rangle\}$. ¿Se puede siempre concluir que $[A, B] = 0$? Si su respuesta es sí, pruébela. Si es no, dé un contraejemplo.

8. Considere un espacio de kets tridimensional. Si un dado conjunto de kets ortonormales, digamos $|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle$, se usan como kets base, los operadores A y B están representados por

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & -a & 0 \\ 0 & 0 & -a \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -ib \\ 0 & ib & 0 \end{pmatrix}$$

   donde a y b son reales.

   a) Obviamente A tiene un espectro degenerado. ¿También lo tiene B?

   b) Muestre que A y B conmutan.

   c) Encuentre un nuevo conjunto de kets ortonormales que sean autokets simultáneos de A y B. Especifique los autovalores de A y B para cada uno de los tres autokets. ¿La especificación de los autovalores caracteriza completamente a cada autoket?

9. Considere un sistema físico cuyo espacio de estados está desarrollado en la base $\{|u\rangle, |v\rangle, |w\rangle\}$. En esta base, los operadores H y B están dados por

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

   mientras que los operadores L y S se definen según

$$\begin{array}{lll} L|u\rangle = |u\rangle & L|v\rangle = 0 & L|w\rangle = -|w\rangle \\ S|u\rangle = |w\rangle & S|v\rangle = |v\rangle & S|w\rangle = |u\rangle \end{array}$$

   a) Muestre que H y B conmutan. Construya una base de autovectores comunes a ambos.

   b) ¿Cuáles de los conjuntos $\{H\}$, $\{B\}$, $\{H, B\}$, $\{H^2, B\}$ son CCOC?

   c) Escriba las matrices que representan a los operadores L, L^2, S, y S^2 en la base $\{|u\rangle, |v\rangle, |w\rangle\}$. ¿Son estos operadores observables?

10. Dos operadores hermíticos anticonmutan, es decir que $\{A, B\} = AB + BA = 0$. ¿Es posible tener un autoket común de A y B? Pruebe o ilustre su conclusión.

11. Dos observables A_1 y A_2, que no involucran explícitamente el tiempo, no conmutan ($[A_1, A_2] \neq 0$), pero se sabe que ambos conmutan con el Hamiltoniano ($[A_1, H] = [A_2, H] = 0$). Pruebe que los autoestados de energía son, en general, degenerados. ¿Hay excepciones? Como un ejemplo, puede pensar en el problema de fuerzas centrales $H = p^2/2m + V(r)$, con $A_1 \to L_z$ y $A_2 \to L_x$.

12. *a)* Sean A, B, C y D operadores. Pruebe las siguientes igualdades

$$\begin{aligned}[A,B+C] &= [A,B]+[A,C]\\ [A,BC] &= [A,B]C+B[A,C]\\ [AB,CD] &= A[B,C]D+[A,C]BD+CA[B,D]+C[A,D]B\\ 0 &= [A,[B,C]]+[B,[C,A]]+[C,[A,B]]\end{aligned}$$

b) Sean A y B, dos operadores que conmutan con $[A,B]$. Demostrar que

$$[A^m,B]=mA^{m-1}[A,B].$$

Use esta propiedad para demostrar que

$$[f(A),B]=\frac{\mathrm{d}f(A)}{\mathrm{d}A}[A,B],$$

donde f es una función que admite un desarrollo en serie de potencias de su argumento.

13. Considere operadores A, L y $A(s)$ tales que

$$A(s)\equiv e^{sL}Ae^{-sL},$$

donde s es un parámetro real.

Demostrar:

a) $\frac{\mathrm{d}A(s)}{\mathrm{d}s}=[L,A(s)]$

b) $\frac{\mathrm{d}^2A(s)}{\mathrm{d}s^2}=[L,[L,A(s)]]$

c) $\frac{\mathrm{d}^3A(s)}{\mathrm{d}s^3}=[L,[L,[L,A(s)]]]$

Utilice esto para expandir $\hat{A}(1)$ en una serie de Taylor y demostrar que

$$e^LAe^{-L}=A+[L,A]+\frac{1}{2!}[L,[L,A]]+\frac{1}{3!}[L,[L,[L,A]]]+\dots$$

14. Sean A y B dos operadores que conmutan con $[A,B]$. Demostrar que

$$e^Ae^B=e^{\frac{1}{2}[A,B]}e^{A+B}$$

Ayuda:

a) Mostrar que $\left[e^{\eta A},B\right]=\eta e^{\eta A}[A,B]$.

b) Definimos $g(\eta)\equiv e^{\eta A}e^{\eta B}e^{-\eta(A+B)}$. Demostrar que la derivada es: $\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}\eta}=\eta[A,B]g$.

c) Integrar la ecuación anterior.

15. *a)* Considere un operador tal que $A^2=\mathbb{I}$ (dé un ejemplo concreto de un operador de este tipo). Demuestre que para todo número real o complejo α y cualquier función f que pueda ser expresada en serie de potencias de su argumento vale que

$$f(\alpha A)=\frac{1}{2}(f(\alpha)+f(-\alpha))\mathbb{I}+\frac{1}{2}(f(\alpha)-f(-\alpha))A$$

En particular muestre que: $e^{-i\alpha A}=\cos\alpha\mathbb{I}-iA\sin\alpha$.

b) Considere un operador B tal que $B^3 = B$ (¿podría encontrar un ejemplo?). Demuestre que para todo número real o complejo α y cualquier función f que pueda ser expresada en serie de potencias de su argumento vale que

$$f(\alpha B) = f(0)\mathbb{I} + \left(\frac{1}{2}(f(\alpha) + f(-\alpha)) - f(0)\right) B^2 + \frac{1}{2}\left(f(\alpha) - f(-\alpha)\right) B$$

Muestre que en tal caso en particular vale que: $e^{-i\alpha B} = \mathbb{I} + (\cos\alpha - 1)B^2 - i\sin\alpha B$.

16. Construya la matriz de cambio de base que conecta la base donde S_z es diagonal con la base en que S_x es diagonal. Muestre que su resultado es consistente con la relación general

$$U = \sum_r \left|b^{(r)}\right\rangle\!\left\langle a^{(r)}\right|,$$

donde $\left|a^{(r)}\right\rangle$ y $\left|b^{(r)}\right\rangle$ son los autovectores de la base original y nueva, respectivamente.

17. Suponga que $f(A)$ es una función de un operador hermítico A con la propiedad

$$A\left|a\right\rangle = a\left|a\right\rangle.$$

Evalúe $\langle b'|f(A)|b\rangle$ suponiendo que se conoce la matriz de transformación entre la base $\{|a\rangle\}$ y la base $\{|b\rangle\}$.

Parte II: Espacios de dimensión infinita. El caso continuo.

18. *a*) Sean x y p_x la coordenada y el momento lineal en una dimensión. Evalúe el corchete de Poisson clásico

$$\{x, F(p_x)\}_{\text{clásico}}.$$

b) Sean ahora x y p_x los correspondientes operadores cuánticos. Evalúe el conmutador

$$\left[x, \exp\left(\frac{ip_x a}{\hbar}\right)\right],$$

y compare con (a) cuando $F(p_x) = \exp(ip_x a/\hbar)$.

c) Usando el resultado de (b), pruebe que

$$\exp\left(\frac{ip_x a}{\hbar}\right)\left|x'\right\rangle, \text{ con } x\left|x'\right\rangle = x'\left|x'\right\rangle,$$

es un autoestado del operador x. ¿Cuál es el correspondiente autovalor?

19. *a*) Verifique que las igualdades

$$[x_i, G(\boldsymbol{p})] = i\hbar\frac{\partial G}{\partial p_i} \qquad [p_i, F(\boldsymbol{x})] = -i\hbar\frac{\partial F}{\partial x_i}$$

pueden derivarse a partir de las relaciones de conmutación fundamentales, para cualquier par de funciones F y G que puedan ser expresadas en serie de potencias de su argumento.

b) Evalúe $\left[x^2, p^2\right]$. Compare su resultado con el corchete de Poisson clásico $\left\{x^2, p^2\right\}_{\text{clásico}}$.

20. El operador de traslación para un desplazamiento espacial finito está dado por

$$\mathcal{T}(\boldsymbol{l}) = \exp\left(\frac{-i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{l}}{\hbar}\right)$$

donde $\boldsymbol{p}$ es el operador impulso.

   a) Evalúe $[x_i, \mathcal{T}(\boldsymbol{l})]$.

   b) Usando (a) (o de alguna otra forma), demuestre cómo cambia el valor de expectación $\langle \boldsymbol{x} \rangle$ frente a traslaciones.

21. Pruebe lo siguiente

$$\langle x'|p|\alpha\rangle = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x'}\langle x'|\alpha\rangle$$
$$\langle\beta|p|\alpha\rangle = \int \mathrm{d}x'\psi_\beta^*(x')(-i\hbar)\frac{\partial}{\partial x'}\psi_\alpha(x')$$

donde $\psi_\alpha(x') = \langle x'|\alpha\rangle$ y $\psi_\beta(x') = \langle x'|\beta\rangle$ son las respectivas funciones de onda. (Ayuda: considere una traslación infinitesimal y calcule $\langle x'|\,\mathcal{T}(\mathrm{d}x)\,|\alpha\rangle$).

22. *a*) ¿Cuál es el significado físico de $\exp(ix\Xi/\hbar)$, donde x es el operador posición y Ξ es algún número con dimensiones de momento? Justifique su respuesta.

   b) Pruebe lo siguiente

$$\langle p'|x|\alpha\rangle = i\hbar\frac{\partial}{\partial p'}\langle p'|\alpha\rangle$$
$$\langle\beta|x|\alpha\rangle = \int \mathrm{d}p'\psi_\beta^*(p')i\hbar\frac{\partial}{\partial p'}\psi_\alpha(p')$$

   donde $\psi_\alpha(p') = \langle p'|\alpha\rangle$ y $\psi_\beta(p') = \langle p'|\beta\rangle$ son las funciones de onda en el espacio de momentos.