Física Teórica 2

Primer cuatrimestre de 2018

Guía 3: Postulados

1. Considere un sistema de espín 1 (con un espacio de estados de dimensión 3) y los siguientes operadores dados, en una dada base ortonormal $\{|a\rangle, |b\rangle, |c\rangle\}$, por las matrices

$$L_x = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad L_y = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad L_z = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   a) Verifique que los autovalores del operador L_j ($j = x, y, z$) son $m_j = 1, 0, -1$ (en unidades de $\hbar$). Diga cuáles son los correspondientes autovectores. Demuestre que estos operadores satisfacen las relaciones de conmutación $[L_j, L_k] = i\hbar\epsilon_{jkl}L_l$. Diga si todos o alguno de estos operadores forman un CCOC.

   b) Suponga que tiene a su disposición tres tipos de aparatos de Stern–Gerlach que separan un haz entrante en tres haces cada uno correspondiendo a los autovalores de m_x, m_y o m_z. Discuta como utilizar estos aparatos para medir L_x, L_y o L_z.

   c) Suponga que prepara un estado con $m_x = 0$ y mide L_z, ¿cuáles son los valores posibles y cuáles son sus probabilidades? ¿Qué sucede si a continuación mide L_x nuevamente? (cuáles son los resultados posibles y cuáles sus probabilidades).

2. Considere el mismo sistema que en el problema anterior y calcule los operadores L_x^2, L_y^2 y L_z^2.

   a) Diga cuáles son sus autovalores y autovectores. Demuestre que estos operadores forman un CCOC. ¿Cuál es la base común de autovectores?

   b) Suponga que prepara un estado con $m_x = 0$ y mide L_z^2. ¿Cuáles son los valores posibles y sus probabilidades? ¿Qué sucede si el estado inicial es tal que $m_y = 0$? y si es $m_z = 1$?

   c) Discuta cómo se puede hacer para medir simultáneamente los tres operadores L_x^2, L_y^2 y L_z^2. Diseñe un instrumento que mida estos operadores usando los aparatos de Stern–Gerlach que separan el haz de acuerdo a los valores de L_j (recuerde que el proceso de separación de un haz en tres, que es efectuado aplicando un campo magnético apropiado, puede ser revertido totalmente).

3. *a*) A continuación se propone una forma de derivar la desigualdad de Schwarz. Primero observe que

$$(\langle\alpha| + \lambda^* \langle\beta|) \cdot (|\alpha\rangle + \lambda |\beta\rangle) \geq 0$$

   para cualquier número complejo λ. Luego, elija λ de tal forma que la desigualdad anterior se reduzca a la desigualdad de Schwarz, $\langle\alpha|\alpha\rangle \langle\beta|\beta\rangle \geq |\langle\alpha|\beta\rangle|^2$.

   b) Para dos observables A y B y un estado cualquiera, pruebe la relación de incerteza generalizada

$$\left\langle (\Delta A)^2 \right\rangle \left\langle (\Delta B)^2 \right\rangle \geq \frac{1}{4} |\langle [A, B] \rangle|^2 ,$$

   donde $\Delta A = A - \langle A \rangle$.

c) Muestre que el signo igual en la relación de incerteza generalizada se obtiene cuando el estado en cuestión satisface

$$\Delta A \left|\alpha\right\rangle = \lambda \Delta B \left|\alpha\right\rangle$$

donde λ es un imaginario puro.

4. Verifique que la función de onda de un paquete gaussiano, dada por

$$\left\langle x' \middle| \alpha \right\rangle = \left(2\pi d^2\right)^{-1/4} \exp\left[\frac{i \left\langle p \right\rangle x'}{\hbar} - \frac{\left(x' - \left\langle x \right\rangle\right)^2}{4d^2}\right]$$

satisface la relación de incerteza mínima

$$\sqrt{\left\langle (\Delta x)^2 \right\rangle}\sqrt{\left\langle (\Delta p)^2 \right\rangle} = \frac{\hbar}{2} \,.$$

Muestre también que la condición

$$\left\langle x' \middle| \Delta x \middle| \alpha \right\rangle = c \left\langle x' \middle| \Delta p \middle| \alpha \right\rangle$$

donde c es un número imaginario, efectivamente se cumple para dicho paquete, en acuerdo con 3(c).

5. Demuestre que el paquete de onda Gaussiano del problema anterior es el único estado que satisface la condición $\Delta x \Delta p = \hbar/2$.

6. *a*) Calcule

$$\left\langle (\Delta S_x)^2 \right\rangle \equiv \left\langle S_x^2 \right\rangle - \left\langle S_x \right\rangle^2$$

donde el valor de expectación es para el estado S_z+. Usando su resultado, verifique la relación de incerteza generalizada,

$$\left\langle (\Delta A)^2 \right\rangle \left\langle (\Delta B)^2 \right\rangle \geq \frac{1}{4} |\langle [A, B] \rangle|^2$$

con $A \to S_x$ y $B \to S_y$.

b) Verifique la relación de incerteza con $A \to S_x$, $B \to S_y$ para el estado S_x+.

7. Encuentre la combinación lineal de $|+\rangle$ y $|-\rangle$ que maximiza el producto

$$\left\langle (\Delta S_x)^2 \right\rangle \left\langle (\Delta S_y)^2 \right\rangle \,.$$

Verifique explícitamente que para la combinación lineal que encontró, la relación de incerteza para S_x y S_y no se viola.

8. Evalúe $\left\langle (\Delta x)^2 \right\rangle \left\langle (\Delta p)^2 \right\rangle$ para una partícula confinada en un pozo unidimensional

$$V = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < x < a \\ \infty & \text{en otro caso} \end{cases}$$

tanto para el estado fundamental como para los estados excitados.