Física Teórica 2

Primer cuatrimestre de 2018

Guía 5: Oscilador armónico y potenciales

Parte I: El oscilador armónico cuántico.

1. Usando el Hamiltoniano de un oscilador armónico unidimensional como ejemplo, ilustre la diferencia entre los esquemas de Heisenberg y Schrödinger. Discuta en particular cómo evolucionan en el tiempo en ambos esquemas:

   a) las variables dinámicas x y p,

   b) el vector de estado más general.

2. Considere un oscilador armónico en una dimensión, cuyo Hamiltoniano es

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}x^2,$$

donde x y p son los operadores posición y momento, respectivamente. Se definen los operadores a y $a^\dagger$, llamados operadores de *aniquilación* y *creación* respectivamente, como la siguiente combinación lineal de x y p

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x + \frac{ip}{m\omega}\right), \qquad a^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x - \frac{ip}{m\omega}\right),$$

Se define además el operador de *número* N como

$$N = a^\dagger a$$

   a) ¿Cuáles de los operadores a, $a^\dagger$ y N es hermítico? ¿Qué consecuencia tiene esto sobre los autovalores y autoestados de los operadores?

   b) Demuestre que los operadores a y $a^\dagger$ satisfacen la regla de conmutación $\left[a, a^\dagger\right] = 1$.

   c) Demuestre que $[N, a] = -a$. Utilizando esto pruebe que si $|n\rangle$ es un autoestado de N con autovalor $n \in \mathbb{R}$, entonces $a|n\rangle$ es un autovector de N con autovalor $n-1$.

   d) Demuestre que $\left[N, a^\dagger\right] = a^\dagger$. Utilizando esto pruebe que si $|n\rangle$ es un autoestado de N con autovalor $n \in \mathbb{R}$, entonces $a^\dagger|n\rangle$ es un autovector de N con autovalor $n+1$.

   e) Observe que los autovalores n de N tienen que ser todos positivos o cero (ayuda: calcule por ejemplo la norma de $a|n\rangle$). De este resultado junto a los dos ítems anteriores concluya que entonces los autovalores de N son los números naturales o cero, $n \in \mathbb{N}_0$.

   f) Para determinar la acción de a y $a^\dagger$ sobre los estados $\{|n\rangle\}$, partiendo de los ítems (c) y (d) escriba $a|n\rangle = C_n|n-1\rangle$ y $a^\dagger|n\rangle = D_n|n+1\rangle$. Obtenga el valor de los coeficientes C_n y D_n calculando la norma de estos vectores y verifique que se obtiene

$$a|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle, \qquad a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle.$$

   g) Demuestre que el autoestado $|n\rangle$ se puede obtener a partir del $|0\rangle$ como

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}\left(a^\dagger\right)^n|0\rangle$$

h) Observe que reemplazando las definiciones de a y $a^\dagger$ en el Hamiltoniano se tiene que

$$H = \hbar\omega\left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right) = \hbar\omega\left(N + \frac{1}{2}\right)$$

Concluya entonces que los valores posibles de energía del oscilador armónico son

$$E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right), \quad n \in \mathbb{N}_0$$

i) Escriba y resuelva las ecuaciones de movimiento en el esquema de Heisenberg para los operadores $x(t)$, $p(t)$, $a(t)$ y $a^\dagger(t)$. ¿Cómo puede interpretar esta evolución?

3. Utilizando las definiciones del ejercicio anterior

   a) Calcule $\langle m|\, a \,|n\rangle$, $\langle m|\, a^\dagger \,|n\rangle$, $\langle m|\, a^2 \,|n\rangle$, $\langle m|\, \left(a^\dagger\right)^2 |n\rangle$.

   b) Calcule $\langle m|\, x \,|n\rangle$, $\langle m|\, p \,|n\rangle$, $\langle m|\, \{x,p\} \,|n\rangle$, $\langle m|\, x^2 \,|n\rangle$ y $\langle m|\, p^2 \,|n\rangle$ (sugerencia: expanda x y p en términos de a y $a^\dagger$).

   c) Evalúe los resultados del ítem anterior para el caso $m = n$, obteniendo los valores medios $\langle x\rangle$, $\langle p\rangle$, $\langle x^2\rangle$, $\langle p^2\rangle$ para los autoestados de energía.

   d) Utilizando los resultados anteriores, calcule la varianza de los operadores x y p en los autoestados del oscilador armónico y verifique que satisfacen la relación

   $$\left\langle (\Delta x)^2 \right\rangle \left\langle (\Delta p)^2 \right\rangle = \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \hbar^2.$$

   ¿Qué ocurre para $n = 0$? ¿Qué condición impone esto sobre la función de onda del estado fundamental?

   e) Compruebe que se cumple el teorema del virial para los valores de expectación de la energía cinética y potencial tomados con respecto a un autoestado de la energía.

4. *a*) Usando que $a\,|0\rangle = 0$, obtenga una ecuación diferencial para la función de onda del estado fundamental del oscilador armónico, $\langle x|0\rangle$. Resuelva la ecuación. ¿Qué forma tiene la función de onda del estado fundamental?

   b) Usando que $a^\dagger\,|0\rangle = |1\rangle$, escriba una ecuación para la función de onda del primer estado excitado. Resuelva la ecuación para obtener $\langle x|1\rangle$ (observación: no es necesario resolver una ecuación diferencial).

5. Considere un oscilador armónico en una dimensión. Partiendo de la ecuación de Schrödinger para el vector de estado, deduzca la ecuación de Schrödinger para la función de onda en el espacio de momentos. ¿Puede dar las autofunciones de la energía en el espacio de momentos? ¿Qué relación tienen estas soluciones con las de la representación en posición?

6. Considere la función, conocida como función de correlación, definida como

   $$C(t) = \langle x(t)x(0)\rangle\,,$$

   donde $x(t)$ es el operador de posición en la representación de Heisenberg. Evalúe explícitamente la función de correlación para el estado fundamental de un oscilador armónico en una dimensión.

7. Considere nuevamente un oscilador armónico en una dimensión. Sin trabajar con las funciones de onda:

a) Construya una combinación lineal de $|0\rangle$ y $|1\rangle$ que maximice $\langle x\rangle$.

b) Considere que el oscilador se encuentra a $t = 0$ en el estado hallado en el punto (a). ¿Cuál es el vector de estado para $t > 0$ en la representación de Schrödinger?

c) Evalúe el valor de expectación $\langle x\rangle$ como función del tiempo para $t > 0$ usando: (i) la representación de Schrödinger, y (ii) la representación de Heisenberg.

d) Evalúe $\left\langle (\Delta x)^2 \right\rangle$ como función del tiempo en ambas representaciones.

8. Demuestre que para un oscilador armónico en una dimensión se verifica

$$\langle 0| e^{ikx} |0\rangle = \exp\left(-\frac{k^2}{2} \langle 0| x^2 |0\rangle\right)$$

donde x es el operador de posición.

9. Se definen los estados *coherentes* de un oscilador armónico en una dimensión como los autoestados del operador de aniquilación a,

$$a |\alpha\rangle = \alpha |\alpha\rangle \,,$$

donde α es en general un número complejo (note que a no es hermítico).

a) Calcule $\langle\alpha| a |\alpha\rangle$ y $\langle\alpha| a^\dagger |\alpha\rangle$.

b) Calcule el valor medio del operador de número, $\langle n\rangle$, y su varianza, $\left\langle (\Delta n)^2 \right\rangle$, para un estado coherente $|\alpha\rangle$.

c) Calcule el valor medio de la energía, $\langle H\rangle$, y su varianza, $\left\langle (\Delta H)^2 \right\rangle$, para un estado coherente $|\alpha\rangle$.

d) Calcule el valor medio del operador posición, $\langle x\rangle$, y su varianza, $\left\langle (\Delta x)^2 \right\rangle$, para un estado coherente $|\alpha\rangle$.

e) Calcule el valor medio del operador momento, $\langle p\rangle$, y su varianza, $\left\langle (\Delta p)^2 \right\rangle$, para un estado coherente $|\alpha\rangle$.

f) A partir de los resultado anteriores demuestre que todo estado coherente satisface la relación de mínima incerteza. ¿Qué dice esto sobre la función de onda de un estado coherente? Escriba explícitamente la forma de $\langle x|\alpha\rangle$.

g) Usando la representación de Heisenberg calcule $\langle x(t)\rangle$ y $\langle p(t)\rangle$. ¿Cómo puede interpretar este resultado? (puede por ejemplo mirar los casos particulares en que α es real o imaginario puro).

h) Encuentre la descomposición de un estado coherente $|\alpha\rangle$ en la base $\{|n\rangle\}$. (Sugerencia: le puede resultar útil recordar que $|n\rangle = (a^\dagger)^n/\sqrt{n!}\,|0\rangle$ y luego pida que $|\alpha\rangle$ esté normalizado).

i) Calcule el producto interno $\langle\beta|\alpha\rangle$ entre dos estados coherentes, $|\alpha\rangle$ y $|\beta\rangle$. ¿Son los estados ortogonales? ¿Por qué?

j) Muestre que la evolución temporal de un estado coherente $|\alpha\rangle$ es un nuevo estado coherente $|\alpha(t)\rangle$. Encuentre la expresión de $\alpha(t)$ y dibuje en el plano complejo la evolución de $\alpha(t)$. ¿Cómo varían en función del tiempo $\langle H\rangle$, $\langle x\rangle$ y $\langle p\rangle$? (esta última cuenta hágala tanto en la representación de Schrödinger como en la de Heisenberg).

k) Si se mide la energía de un oscilador armónico en un estado coherente $|\alpha\rangle$, ¿qué valores pueden obtenerse y con qué probabilidad?

10. Considere un oscilador armónico en un estado coherente $|\alpha\rangle$.

    a) Calcule las desviaciones estándar relativas de N y H, es decir $\sqrt{\langle(\Delta N)^2\rangle}/\langle N\rangle$ y $\sqrt{\langle(\Delta H)^2\rangle}/\langle H\rangle$. ¿Qué sucede para $|\alpha| \gg 1$?

    b) Calcule $\langle H\rangle$, $\langle p\rangle$ y $\langle x\rangle$ y muestre que satisfacen la misma relación que las variables clásicas $E = p^2/2m + m\omega^2 x^2/2$ para $E \gg \hbar\omega$. ¿Qué condición impone esto para los valores de α?

11. Se define el operador de desplazamiento en el espacio de fases como

$$D(\alpha) = \exp\Big(\alpha a^\dagger - \alpha^* a\Big)$$

donde $\alpha \in \mathbb{C}$.

    a) Muestre que $D(\alpha)$ es unitario y además $D^{-1}(\alpha) = D(-\alpha)$.

    b) Muestre que el estado $|\alpha\rangle = D(\alpha)|0\rangle$ es autoestado del operador de aniquilación a. ¿Cuál es el autovalor correspondiente? ¿Qué tipo de estado es $|\alpha\rangle = D(\alpha)|0\rangle$?

    c) Muestre que la acción de $D(\alpha)$ sobre el autoestado $|0\rangle$ de energía satisface

$$D(\alpha)|0\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} e^{\alpha a^\dagger}|0\rangle$$

    Expanda $e^{\alpha a^\dagger}$ en serie de potencias y encuentre la expansión de $|\alpha\rangle = D(\alpha)|0\rangle$ en la base de autoestados de energía, $\{|n\rangle\}$.

12. Considere una partícula sujeta a un potencial de oscilador armónico en una dimensión. Suponga que a $t = 0$ el estado viene dado por

$$|\varphi\rangle = \exp\left(\frac{-ipd}{\hbar}\right)|0\rangle,$$

donde p es el operador de momento y d es un número con dimensiones de longitud.

    a) Usando la representación de Heisenberg, evalúe el valor de expectación $\langle x\rangle$ para $t > 0$. Interprete el resultado. ¿Qué tipo de evolución temporal sigue $\langle x\rangle$?

    b) Muestre que $|\varphi\rangle$ es autoestado del operador de aniquilación a y calcule su autovalor. ¿Qué tipo de estado describe $|\varphi\rangle$?

13. Escriba la función de onda (en el espacio de coordenadas) para el estado especificado en el problema 12 a $t = 0$. Puede usar

$$\langle x'|0\rangle = \pi^{-1/4} x_0^{-1/2} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x'}{x_0}\right)^2\right] \quad \text{donde} \quad x_0 = \left(\frac{\hbar}{m\omega}\right)^{1/2}.$$

Obtenga luego una expresión simple para la probabilidad de que la partícula se encuentre en el estado fundamental a $t = 0$. ¿Cambia esta probabilidad para $t > 0$?

14. Considere una partícula en una dimensión cuyo movimiento está gobernado por el Hamiltoniano

$$H = \hbar g (a^\dagger a)^2,$$

donde $a = \frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{x}{\sigma} + i\frac{p}{\hbar\sigma})$ y $\sigma = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$.

    a) Calcule los autoestados y autovalores de H.

b) Suponga que a $t = 0$ se prepara al sistema en el estado

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{2}\left(|0\rangle + |1\rangle\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}|2\rangle\,,$$

donde $|0\rangle$, $|1\rangle$ y $|2\rangle$ son los tres primeros estados del oscilador armónico. ¿Cuál es la probabilidad de que a tiempo T el sistema esté en su estado fundamental?

c) Suponga ahora que a $t = 0$ se prepara al sistema en un estado coherente de un oscilador armónico de frecuencia ω, $|\psi(0)\rangle = |\alpha\rangle$. ¿Cómo es $|\psi(T)\rangle$? Escriba $|\psi(T)\rangle$ en los casos en que $T = 2\pi/g$ y $T = \pi/g$.

d) Elegimos $T = \pi/(2g)$. Muestre que

$$|\psi(T)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\exp(-i\pi/4)\,|\alpha\rangle + \exp(i\pi/4)\,|-\alpha\rangle\right)$$

e) Si α es imaginario puro, discuta las propiedades físicas del estado descrito en (d). En ese caso calcule el valor medio de la posición y el momento.

Parte II: Potenciales.

15. Considere una partícula sometida a un potencial de la forma

$$V = \begin{cases} kx^2/2 & x > 0 \\ \infty & x < 0. \end{cases}$$

a) ¿Cuál es la energía del estado fundamental?

b) ¿Cuál es el valor de expectación $\left\langle x^2 \right\rangle$ para el estado fundamental?

16. Una partícula en una dimensión está atrapada entre dos paredes rígidas

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < x < L \\ \infty & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

A $t = 0$ la partícula está en $x = L/2$ con certeza. ¿Cuáles son las probabilidades relativas de que la partícula se encuentre en distintos autoestados de energía? Escriba la función de onda para $t \geq 0$ (no necesita preocuparse por la normalización absoluta, convergencia u otras sutilezas matemáticas).

17. Considere una partícula en una dimensión ligada a un centro fijo por un potencial tipo δ de la forma $V(x) = -\lambda\delta(x)$, donde λ es un número real y positivo. Encuentre la función de onda y la energía de ligadura del estado fundamental. ¿Hay estados excitados ligados?

18. Una partícula de masa m en una dimensión está ligada a un centro fijo por un potencial atractivo tipo delta

$$V(x) = -\lambda\delta(x), \quad \lambda > 0.$$

A $t = 0$ se apaga repentinamente el potencial (es decir, $V = 0$ para $t > 0$). Encuentre la función de onda para $t > 0$ (sea cuantitativo, no es necesario evaluar una integral que pueda aparecer).

19. Una partícula en una dimensión ($-\infty < x < \infty$) está sometida a una fuerza que puede derivarse de un potencial de la forma

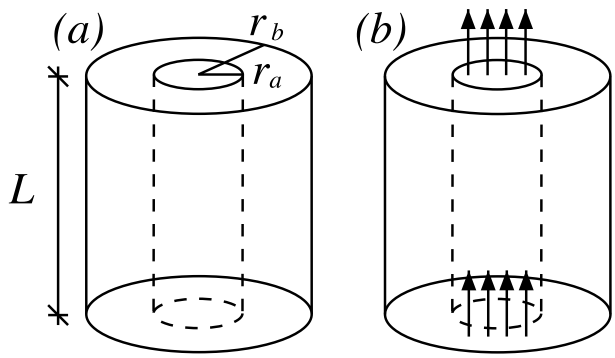
$$V(x) = \lambda x, \quad \lambda > 0.$$

a) ¿Es el espectro de energía discreto o continuo? Escriba una expresión aproximada para la autofunción de energía especificada por E. Dibújela cualitativamente.

b) Discuta brevemente qué cambios son necesarios si V es reemplazado por $V = \lambda|x|$.

20. Considere una partícula que puede moverse en las paredes de un cilindro infinito de radio R, sometida a un potencial $V = kz^2$. El eje del cilindro coincide con el eje z. Calcule los autoestados y autovalores de H. Compare con el caso en el que $R \to \infty$ (partícula sobre el plano).

21. Considere un electrón confinado en la región encerrada entre dos paredes cilíndricas cuyos ejes coinciden con el eje z, como se muestra en la figura. La función de onda debe anularse en las paredes de los cilindros, de radio r_a y r_b respectivamente ($r_a < r_b$), y también en las tapas de los cilindros ubicadas en $z = 0$ y $z = L$.



a) Encuentre las autofunciones de la energía (no se preocupe por la normalización). Muestre que los autovalores de la energía están dados por

$$E_{lmn} = \left(\frac{\hbar^2}{2m}\right)\left[k_{mn}^2 + \left(\frac{l\pi}{L}\right)\right] \quad (l = 1, 2, 3, \ldots, m = 0, 1, 2, \ldots),$$

donde k_{mn} es la raíz n-ésima de la ecuación trascendental

$$J_m(k_{mn}r_b)N_m(k_{mn}r_a) - J_m(k_{mn}r_a)N_m(k_{mn}r_b) = 0.$$

b) Repita el mismo problema cuando existe un campo magnético uniforme $\boldsymbol{B} = B\hat{\boldsymbol{z}}$ en la región $r < r_a$. Considere para ello un potencial vector de la forma

$$\boldsymbol{A} = \frac{Br_a^2}{2r}\hat{\boldsymbol{\varphi}},$$

y note que en la ecuación de Schrödinger solo necesita reemplazar el operador ∇ por $\nabla - ie\boldsymbol{A}/\hbar c$. Observe que los autovalores de energía cambian aunque el electrón no entra en la región donde se encuentra el campo magnético.

c) ¿Qué ocurre con los autovalores de la energía cuando $L \to \infty$?

d) Compare los resultados obtenidos en (a) y (b). Muestre que para que los niveles de energía no cambien se debe introducir un número entero de cuantos de flujo magnético

$$\pi r_a^2 B = \frac{2\pi N\hbar c}{e} \quad (N = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

22. Un electrón se mueve en la presencia de un campo magnético uniforme en la dirección z ($\boldsymbol{B} = B\hat{\boldsymbol{z}}$).

   a) Evalúe $[\Pi_x, \Pi_y]$, donde

   $$\Pi_x = p_x - \frac{eA_x}{c} \qquad \Pi_y = p_y - \frac{eA_y}{c}.$$

   b) Comparando el Hamiltoniano del problema y las relaciones de conmutación obtenidas en (a) con las expresiones correspondientes al problema del oscilador armónico unidimensional, muestre que los autovalores de energía de este problema son

   $$E_{kn} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + \frac{|eB|\hbar}{mc}\left(n + \frac{1}{2}\right), \tag{1}$$

   donde $n = 0, 1, 2, \ldots$, y $\hbar k$ es el autovalor continuo del operador p_z.