

Espacios de Hilbert \mathcal{H}

Espacio de Hilbert: un espacio vectorial con producto escalar que es completo.

Vimos espacios de dimensión finita:

todo $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ se puede desarrollar en base ortonormal $\{|i\rangle\}$.

$$|\psi\rangle = \sum_i^n c_i |i\rangle \quad \longleftarrow \quad \text{desarrollo en la base}$$

$$c_i = \langle i | \psi \rangle \quad \longleftarrow \quad \text{coeficientes del desarrollo}$$

$$\sum_i^n |i\rangle\langle i| = \hat{1} \quad \longleftarrow \quad \text{completitud}$$

$$\langle i | j \rangle = \delta_{ij} \quad \longleftarrow \quad \text{ortonormalidad}$$

Bases infinitas discretas

Sea $\psi(x)$ real de cuadrado integrable, $\int |\psi|^2 dx$, y nula salvo en $0 \leq x \leq L$.

Bases infinitas discretas

Sea $\psi(x)$ real de cuadrado integrable, $\int |\psi|^2 dx$, y nula salvo en $0 \leq x \leq L$.

1. La serie de Fourier nos asegura que podemos expandir $\psi(x)$ en senos:

$$\psi(x) = \sum c_n \underbrace{\sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n\pi x}{L}}_{u_n(x)} \quad \longrightarrow \quad \psi(x) = \sum c_n u_n(x)$$

Bases infinitas discretas

Sea $\psi(x)$ real de cuadrado integrable, $\int |\psi|^2 dx$, y nula salvo en $0 \leq x \leq L$.

1. La serie de Fourier nos asegura que podemos expandir $\psi(x)$ en senos:

$$\psi(x) = \sum c_n \underbrace{\sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n\pi x}{L}}_{u_n(x)} \quad \longrightarrow \quad \psi(x) = \sum c_n u_n(x)$$

2. Es un desarrollo en una base infinita numerable y ortonormal $\{u_n(x)/n \in \mathbb{N}\}$:

$$\int_0^L \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{m\pi x}{L} dx = \frac{L}{2} \delta_{nm} \quad \longrightarrow \quad (u_n, u_m) = \int u_n^*(x) u_m(x) dx = \delta_{nm}$$

Bases infinitas discretas

Sea $\psi(x)$ real de cuadrado integrable, $\int |\psi|^2 dx$, y nula salvo en $0 \leq x \leq L$.

1. La serie de Fourier nos asegura que podemos expandir $\psi(x)$ en senos:

$$\psi(x) = \sum c_n \underbrace{\sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n\pi x}{L}}_{u_n(x)} \quad \longrightarrow \quad \psi(x) = \sum c_n u_n(x)$$

2. Es un desarrollo en una base infinita numerable y ortonormal $\{u_n(x)/n \in \mathbb{N}\}$:

$$\int_0^L \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{m\pi x}{L} dx = \frac{L}{2} \delta_{nm} \quad \longrightarrow \quad (u_n, u_m) = \int u_n^*(x) u_m(x) dx = \delta_{nm}$$

3. Los coeficientes del desarrollo son:

$$(u_m, \psi) = \sum c_n (u_m, u_n) = \sum c_n \delta_{nm} = c_m \quad \longrightarrow \quad c_n = (u_n, \psi) = \int u_n^*(x) \psi(x) dx$$

Bases infinitas discretas

Sea $\psi(x)$ real de cuadrado integrable, $\int |\psi|^2 dx$, y nula salvo en $0 \leq x \leq L$.

1. La serie de Fourier nos asegura que podemos expandir $\psi(x)$ en senos:

$$\psi(x) = \sum c_n \underbrace{\sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n\pi x}{L}}_{u_n(x)} \longrightarrow \psi(x) = \sum c_n u_n(x)$$

2. Es un desarrollo en una base infinita numerable y ortonormal $\{u_n(x)/n \in \mathbb{N}\}$:

$$\int_0^L \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{m\pi x}{L} dx = \frac{L}{2} \delta_{nm} \longrightarrow (u_n, u_m) = \int u_n^*(x) u_m(x) dx = \delta_{nm}$$

3. Los coeficientes del desarrollo son:

$$(u_m, \psi) = \sum c_n (u_m, u_n) = \sum c_n \delta_{nm} = c_m \longrightarrow c_n = (u_n, \psi) = \int u_n^*(x) \psi(x) dx$$

4. La relación de completitud se obtiene reemplazando en $\psi(x') = \sum c_n u_n(x')$:

$$\psi(x') = \sum \left[\int u_n^*(x) \psi(x) dx \right] u_n(x') = \int \left[\sum u_n^*(x) u_n(x') \right] \psi(x) dx \longrightarrow \sum u_n^*(x) u_n(x') = \delta(x-x')$$

El espacio de Hilbert de las funciones de cuadrado integrable

Comparación entre base finita y base infinita discreta.

Base discreta $u_n(x)$

Base finita $|i\rangle$

Desarrollo :

$$\psi(x) = \sum c_n u_n(x)$$

$$|\psi\rangle = \sum_i c_i |i\rangle$$

Coficientes :

$$c_n = (u_n, \psi)$$

$$c_i = \langle i | \psi \rangle$$

Compleitud :

$$\sum u_n^*(x) u_n(x') = \delta(x-x')$$

$$\sum_i |i\rangle \langle i| = \hat{1}$$

Ortonormalidad :

$$(u_n, u_{n'}) = \delta_{nn'}$$

$$\langle i | j \rangle = \delta_{ij}$$

Bases continuas

1. El teorema de la Transformada de Fourier establece

$$\bar{\psi}(k) = \int \psi(x) \frac{e^{-ikx}}{\sqrt{2\pi}} dx \quad \rightarrow \quad \psi(x) = \int \bar{\psi}(k) \frac{e^{+ikx}}{\sqrt{2\pi}} dk$$

Bases continuas

1. El teorema de la Transformada de Fourier establece

$$\bar{\psi}(k) = \int \psi(x) \frac{e^{-ikx}}{\sqrt{2\pi}} dx \quad \rightarrow \quad \psi(x) = \int \bar{\psi}(k) \frac{e^{+ikx}}{\sqrt{2\pi}} dk$$

2. Definiendo $v_k(x) \equiv \frac{e^{+ikx}}{\sqrt{2\pi}}$, luce como un desarrollo en la base continua $\{v_k(x)/k \in \mathbb{R}\}$

$$\psi(x) = \int \bar{\psi}(k) v_k(x) dk \quad \text{y} \quad \bar{\psi}(k) = \int v_k^*(x) \psi(x) dx = (v_k, \psi)$$

Bases continuas

1. El teorema de la Transformada de Fourier establece

$$\bar{\psi}(k) = \int \psi(x) \frac{e^{-ikx}}{\sqrt{2\pi}} dx \quad \rightarrow \quad \psi(x) = \int \bar{\psi}(k) \frac{e^{+ikx}}{\sqrt{2\pi}} dk$$

2. Definiendo $v_k(x) \equiv \frac{e^{+ikx}}{\sqrt{2\pi}}$, luce como un desarrollo en la base continua $\{v_k(x)/k \in \mathbb{R}\}$

$$\psi(x) = \int \bar{\psi}(k) v_k(x) dk \quad \text{y} \quad \bar{\psi}(k) = \int v_k^*(x) \psi(x) dx = (v_k, \psi)$$

3. La relación de ortonormalidad se obtiene reemplazando en $\bar{\psi}(k') = \int v_{k'}^*(x) \psi(x) dx$

$$\bar{\psi}(k') = \int \left[\int v_{k'}^*(x) v_k(x) dx \right] \bar{\psi}(k) dk \quad \rightarrow \quad \int v_{k'}^*(x) v_k(x) dx = (v_{k'}, v_k) = \delta(k-k')$$

Bases continuas

1. El teorema de la Transformada de Fourier establece

$$\bar{\psi}(k) = \int \psi(x) \frac{e^{-ikx}}{\sqrt{2\pi}} dx \quad \rightarrow \quad \psi(x) = \int \bar{\psi}(k) \frac{e^{+ikx}}{\sqrt{2\pi}} dk$$

2. Definiendo $v_k(x) \equiv \frac{e^{+ikx}}{\sqrt{2\pi}}$, luce como un desarrollo en la base continua $\{v_k(x)/k \in \mathbb{R}\}$

$$\psi(x) = \int \bar{\psi}(k) v_k(x) dk \quad \text{y} \quad \bar{\psi}(k) = \int v_k^*(x) \psi(x) dx = (v_k, \psi)$$

3. La relación de ortonormalidad se obtiene reemplazando en $\bar{\psi}(k') = \int v_{k'}^*(x) \psi(x) dx$

$$\bar{\psi}(k') = \int \left[\int v_{k'}^*(x) v_k(x) dx \right] \bar{\psi}(k) dk \quad \rightarrow \quad \int v_{k'}^*(x) v_k(x) dx = (v_{k'}, v_k) = \delta(k-k')$$

4. La relación de completitud se obtiene reemplazando en $\psi(x') = \int \bar{\psi}(k) v_k(x') dk$:

$$\psi(x') = \int \left[\int v_k^*(x) \psi(x) dx \right] v_k(x') dk = \int \left[\int v_k^*(x) v_k(x') dx \right] \psi(x) dx \quad \rightarrow \quad \int v_k^*(x) v_k(x') dx = \delta(x-x')$$

La “base continua” $v_k(x)$

Base discreta $\{u_n(x), n \in \mathbb{N}\}$

Desarrollo : $\psi(x) = \sum c_n u_n(x)$

Coefficientes : $c_n = (u_n, \psi)$

Completitud : $\sum u_n^*(x) u_n(x') = \delta(x-x')$

Ortonormalidad : $(u_n, u_{n'}) = \delta_{nn'}$

La “base continua” $v_k(x)$

Base discreta $\{u_n(x), n \in \mathbb{N}\}$

Base continua $\{v_k(x), k \in \mathbb{R}\}$

Desarrollo :

$$\psi(x) = \sum c_n u_n(x)$$

$$\psi(x) = \int \bar{\psi}(k) v_k(x) dk$$

Coeficientes :

$$c_n = (u_n, \psi)$$

$$\bar{\psi}(k) = (v_k, \psi)$$

Completitud :

$$\sum u_n^*(x) u_n(x') = \delta(x-x')$$

$$\int v_k^*(x) v_k(x') dk = \delta(x-x')$$

Ortonormalidad :

$$(u_n, u_{n'}) = \delta_{nn'}$$

$$(v_k, v_{k'}) = \delta(k-k')$$

Bases continuas

Sean dos estados arbitrarios φ y ψ de una partícula en una caja de ancho L

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \sum b_n u_n(x) & \psi(x) &= \sum c_n u_n(x) & &= \sum c_n \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n\pi x}{L} \\ \varphi(x) &= \int \bar{\varphi}(k) v_k(x) dk & \psi(x) &= \int \bar{\psi}(k) v_k(x) dk & &= \int \bar{\psi}(k) \frac{e^{+ikx}}{\sqrt{2\pi}} dk\end{aligned}$$

El producto interno de φ y ψ es:

$$\begin{aligned}(\varphi, \psi) &= \int \varphi^*(x) \psi(x) dx \\ &= \int \bar{\varphi}^*(k) \bar{\psi}(k) dk \\ &= \sum b_n^* c_n\end{aligned}$$

Vemos que $\psi(x)$, $\bar{\psi}(k)$, c_n , aparecen a un mismo nivel, son los números que representan un objeto abstracto ψ a la hora de hacer cuentas:

- ❑ c_n en la base $u_n(x)$
- ❑ $\bar{\psi}(k)$ en la base $v_k(x)$

Bases continuas

Sean dos estados arbitrarios φ y ψ de una partícula en una caja de ancho L

$$\varphi(x) = \sum b_n u_n(x) \quad \psi(x) = \sum c_n u_n(x) \quad = \sum c_n \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n\pi x}{L}$$

$$\varphi(x) = \int \bar{\varphi}(k) v_k(x) dk \quad \psi(x) = \int \bar{\psi}(k) v_k(x) dk \quad = \int \bar{\psi}(k) \frac{e^{+ikx}}{\sqrt{2\pi}} dk$$

$$\varphi(x) = \int \varphi(r) f_r(x) dr \quad \psi(x) = \int \psi(r) f_r(x) dr$$

El producto interno de φ y ψ es:

$$\begin{aligned} (\varphi, \psi) &= \int \varphi^*(x) \psi(x) dx = \int \varphi^*(r) \psi(r) dr \\ &= \int \bar{\varphi}^*(k) \bar{\psi}(k) dk \\ &= \sum b_n^* c_n \end{aligned}$$

Vemos que $\psi(x)$, $\bar{\psi}(k)$, c_n , aparecen a un mismo nivel, son los números que representan un objeto abstracto ψ a la hora de hacer cuentas:

- ❑ c_n en la base $u_n(x)$
- ❑ $\bar{\psi}(k)$ en la base $v_k(x)$
- ❑ $\psi(r)$ en la base $f_r(x)$

Bases continuas

Sean dos estados arbitrarios φ y ψ de una partícula en una caja de ancho L

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \sum b_n u_n(x) & \psi(x) &= \sum c_n u_n(x) & &= \sum c_n \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n\pi x}{L} \\ \varphi(x) &= \int \bar{\varphi}(k) v_k(x) dk & \psi(x) &= \int \bar{\psi}(k) v_k(x) dk & &= \int \bar{\psi}(k) \frac{e^{+ikx}}{\sqrt{2\pi}} dk \\ \varphi(x) &= \int \varphi(r) f_r(x) dr & \psi(x) &= \int \psi(r) f_r(x) dr & &= \int \psi(r) \delta(r-x) dr\end{aligned}$$

El producto interno de φ y ψ es:

$$\begin{aligned}(\varphi, \psi) &= \int \varphi^*(x) \psi(x) dx & &= \int \varphi^*(r) \psi(r) dr \\ &= \int \bar{\varphi}^*(k) \bar{\psi}(k) dk \\ &= \sum b_n^* c_n\end{aligned}$$

Vemos que $\psi(x)$, $\bar{\psi}(k)$, c_n , aparecen a un mismo nivel, son los números que representan un objeto abstracto ψ a la hora de hacer cuentas:

- ❑ c_n en la base $u_n(x)$
- ❑ $\bar{\psi}(k)$ en la base $v_k(x)$
- ❑ $\psi(r)$ en la base $f_r(x)$

La “base continua” $f_r(x)$

$$\begin{array}{ll} \psi(x) = \int \psi(r) \delta(x-r) \, dr & \longrightarrow \psi(x) = \int \psi(r) f_r(x) \, dr \\ \psi(r) = \int \delta(x-r) \psi(x) \, dx & \longrightarrow \psi(r) = (f_r, \psi) \\ \int \delta(x-r) \delta(x'-r) \, dr = \delta(x-x') & \longrightarrow \int f_r^*(x) f_r(x') \, dr = \delta(x-x') \\ \int \delta(x-r) \delta(x-r') \, dx = \delta(r-r') & \longrightarrow (f_r, f_{r'}) = \delta(r-r') \end{array}$$

Base discreta $u_n(x)$

$$\psi(x) = \sum c_n u_n(x)$$

$$c_n = (u_n, \psi)$$

$$\sum u_n^*(x) u_n(x') = \delta(x-x')$$

$$(u_n, u_{n'}) = \delta_{nn'}$$

Base continua $v_k(x)$

$$v_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx}$$

$$\psi(x) = \int \bar{\psi}(k) v_k(x) dk$$

$$\bar{\psi}(k) = (v_k, \psi)$$

$$\int v_k^*(x) v_k(x') dk = \delta(x-x')$$

$$(v_k, v_{k'}) = \delta(k-k')$$

Base continua $f_r(x)$

$$f_r(x) = \delta(x-r)$$

$$\psi(x) = \int \psi(r) f_r(x) dr$$

$$\psi(r) = (f_r, \psi)$$

$$\int f_r^*(x) f_r(x') dr = \delta(x-x')$$

$$(f_r, f_{r'}) = \delta(r-r')$$

Base discreta $u_n(\mathbf{x})$

$$\psi(\mathbf{x}) = \sum c_n u_n(\mathbf{x})$$

$$c_n = (u_n, \psi)$$

$$\sum u_n^*(\mathbf{x}) u_n(\mathbf{x}') = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$$

$$(u_n, u_{n'}) = \delta_{nn'}$$

Base continua $v_k(\mathbf{x})$

$$v_k(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$$

$$\psi(\mathbf{x}) = \int \bar{\psi}(\mathbf{k}) v_k(\mathbf{x}) d\mathbf{k}$$

$$\bar{\psi}(\mathbf{k}) = (v_k, \psi)$$

$$\int v_k^*(\mathbf{x}) v_k(\mathbf{x}') d\mathbf{k} = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$$

$$(v_k, v_{k'}) = \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$$

Base continua $f_r(\mathbf{x})$

$$f_r(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{r})$$

$$\psi(\mathbf{x}) = \int \psi(\mathbf{r}) f_r(\mathbf{x}) d\mathbf{r}$$

$$\psi(\mathbf{r}) = (f_r, \psi)$$

$$\int f_r^*(\mathbf{x}) f_r(\mathbf{x}') d\mathbf{r} = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$$

$$(f_r, f_{r'}) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

Base discreta $u_n(x)$ **Base continua $v_k(x)$** **Base continua $f_r(x)$**

$$v_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ik \cdot x}$$

$$f_r(x) = \delta(x-r)$$

$$\psi(x) = \sum c_n u_n(x)$$

$$\psi(x) = \int \bar{\psi}(k) v_k(x) dk$$

$$\psi(x) = \int \psi(r) f_r(x) dr$$

$$c_n = (u_n, \psi)$$

$$\bar{\psi}(k) = (v_k, \psi)$$

$$\psi(r) = (f_r, \psi)$$

$$\sum u_n^*(x) u_n(x') = \delta(x-x')$$

$$\int v_k^*(x) v_k(x') dk = \delta(x-x')$$

$$\int f_r^*(x) f_r(x') dr = \delta(x-x')$$

$$(u_n, u_{n'}) = \delta_{nn'}$$

$$(v_k, v_{k'}) = \delta(k-k')$$

$$(f_r, f_{r'}) = \delta(r-r')$$

Estas expresiones dan lugar a tres desarrollos distintos para $|\psi\rangle$

$$|\psi\rangle = \sum |n\rangle c_n$$

$$|\psi\rangle = \int |k\rangle \bar{\psi}(k) dk$$

$$|\psi\rangle = \int |r\rangle \psi(r) dr$$

$$c_n = \langle n | \psi \rangle$$

$$\bar{\psi}(k) = \langle k | \psi \rangle$$

$$\psi(r) = \langle r | \psi \rangle$$

$$\sum |n\rangle \langle n| = \hat{1}$$

$$\int |k\rangle \langle k| dk = \hat{1}$$

$$\int |r\rangle \langle r| dr = \hat{1}$$

$$\langle n | n' \rangle = \delta_{nn'}$$

$$\langle k | k' \rangle = \delta(k-k')$$

$$\langle r | r' \rangle = \delta(r-r')$$