Oscilador armónico

Queremos hallar los autoestados en un potencial $V(x) = \frac{1}{2} k\, x^2 = \frac{1}{2}\, m\omega^2\, x^2$

$$H = \frac{1}{2m} P^2 + \frac{1}{2}\, m\omega^2 X^2 \qquad\qquad [\,X, P\,] = i\hbar$$

Análisis dimensional:

$$[\hbar] = \mathrm{kg\, m^2\, s^{-1}} \qquad [m] = \mathrm{kg} \qquad [\omega] = \mathrm{s^{-1}}$$

Operadores adimensionales :

$$[H] = \hbar\omega \qquad [X] = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \qquad [P] = \sqrt{\hbar m\omega}$$

$$\hat{H} \equiv \frac{1}{\hbar\omega} H \qquad \hat{X} \equiv \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\, X \qquad \hat{P} \equiv \sqrt{\frac{1}{\hbar m\omega}}\, P$$

El problema a resolver es:

$$\hat{H} = \frac{1}{2}\left(\hat{X}^2 + \hat{P}^2\right) \qquad [\,\hat{X}, \hat{P}\,] = i$$

Los operadores a y $a^\dagger$

Definimos los operadores no-hermíticos

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{X} + i\hat{P}\right) \qquad\qquad a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{X} - i\hat{P}\right)$$

cuyas inversas son

$$\begin{cases} \hat{X} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(a^\dagger + a) \\ \hat{P} = \frac{i}{\sqrt{2}}\,(a^\dagger - a) \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} X = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\,(a^\dagger + a) \\ P = i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}\,(a^\dagger - a) \end{cases}$$

La relación de conmutación $[a, a^\dagger]$ sale de $[\hat{X}, \hat{P}] = i$:

$$\begin{cases} a^\dagger a = \frac{1}{2}(\hat{X} - i\hat{P})(\hat{X} + i\hat{P}) = \frac{1}{2}\left[\hat{X}^2 + \hat{P}^2 + i(\hat{X}\hat{P} - \hat{P}\hat{X})\right] = \frac{1}{2}\left[\hat{X}^2 + \hat{P}^2 - 1\right] = \hat{H} - \frac{1}{2} \\ a\, a^\dagger = \frac{1}{2}(\hat{X} + i\hat{P})(\hat{X} - i\hat{P}) = \frac{1}{2}\left[\hat{X}^2 + \hat{P}^2 - i(\hat{X}\hat{P} - \hat{P}\hat{X})\right] = \frac{1}{2}\left[\hat{X}^2 + \hat{P}^2 + 1\right] = \hat{H} + \frac{1}{2} \end{cases}$$

El problema a resolver queda :

$$\hat{H} = a^\dagger a + \frac{1}{2} \qquad\qquad [a, a^\dagger] = 1$$

Los operadores a y $a^\dagger$

Llamemos $n \in \mathbb{R}$ a los autovalores de $a^\dagger a$, y $|n\rangle$ a los correspondientes autoestados

$$a^\dagger a\,|n\rangle = n\,|n\rangle \qquad\qquad \langle n|n\rangle = 1$$

① $n \geq 0$

Sea $|\psi\rangle = a|n\rangle$. Entonces: $0 \leq \langle\psi|\psi\rangle = \langle n|\,a^\dagger a\,|n\rangle = n\,\langle n|n\rangle = n$

② Los operadores $a^\dagger$ y a son de subida y bajada

$$\begin{cases} a^\dagger\,|n\rangle = c\,|n{+}1\rangle & \text{pues} \quad a^\dagger a\,[a^\dagger\,|n\rangle] = a^\dagger\,(a^\dagger a{+}1)\,|n\rangle = (n{+}1)\;[a^\dagger\,|n\rangle] \\ a\,|n\rangle = c'\,|n{-}1\rangle & \text{pues} \quad a^\dagger a\,[a\,|n\rangle] = (a\,a^\dagger - 1)\,a\,|n\rangle = (n{-}1)\;[a\,|n\rangle] \end{cases}$$

③ Los coeficientes c y c' se determinan imponiendo normalización de los kets

$$\begin{cases} a^\dagger\,|n\rangle = c\,|n{+}1\rangle \;\Rightarrow\; |\,c\,|^2\langle n{+}1|n{+}1\rangle = \langle n|aa^\dagger\,|n\rangle \;\Rightarrow\; |\,c\,|^2 = \langle n|(aa^\dagger + 1)|n\rangle = n{+}1 \\ a\,|n\rangle = c'\,|n{-}1\rangle \;\Rightarrow\; |c'|^2\langle n{-}1|n{-}1\rangle = \langle n|a^\dagger a|n\rangle \;\Rightarrow\; |c'|^2 = n \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{aligned} a^\dagger\,|n\rangle &= \sqrt{n{+}1}\;|n{+}1\rangle \\ a\,|n\rangle &= \sqrt{n}\;\;|n{-}1\rangle \end{aligned}}$$

Autovalores de $a^\dagger a$ y base de autoestados del Hamiltoniano

④ Si hay un autovalor $n' \in \mathbb{N}^0$ entonces todos los naturales son autovalores :

- ➪ aplicando $a^\dagger |n'\rangle = \sqrt{n'+1}\,|n'+1\rangle$ se recorre todo $n > n'$
- ➪ aplicando $a\,|n'\rangle = \sqrt{n'}\,|n'-1\rangle$ se recorre todo $n < n'$ hasta $n = 0$
- ➪ no se puede bajar de $n = 0$ pues: $a\,|0\rangle = 0$

⑤ No puede haber autovalores $n' \notin \mathbb{N}^0$:

- ➪ aplicando $a\,|n'\rangle = \sqrt{n'}\,|n'-1\rangle$ se llegaría a $n < 0$ contradiciendo que $n \geq 0$.

⑥ Los autovalores y autoestados de $a^\dagger a$ son los naturales con el cero.

Usando la expresión para el hamiltoniano $H = (a^\dagger a + \frac{1}{2})\,\hbar\omega$:

Base $\left\{|\,n\,\rangle, n \in \mathbb{N}^0\right\}$ $\boxed{a^\dagger a\,|\,n\,\rangle = n\,|\,n\,\rangle}$ $\boxed{H\,|\,n\,\rangle = (n+\frac{1}{2})\,\hbar\omega\,|\,n\,\rangle}$

Propiedades de la base $\{|\, n\,\rangle\}$

① El cálculo del valor de expectación de X y P en $\{|\, n\,\rangle\}$ es inmediato :

$$\begin{cases} X = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\ (a^\dagger + a) \\ P = i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}\ (a^\dagger - a) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \langle\, n\,|\,X\,|\,n\,\rangle = 0 \\ \langle\, n\,|\,P\,|\,n\,\rangle = 0 \end{cases} \quad \text{pues} \quad \begin{cases} \langle\, n\,|\,a\,|\,n\,\rangle = 0 \\ \langle\, n\,|\,a^\dagger\,|\,n\,\rangle = 0 \end{cases}$$

Propiedades de la base $\{|\, n\,\rangle\}$

① El cálculo del valor de expectación de X y P en $\{|\, n\,\rangle\}$ es inmediato :

$$\begin{cases} X = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\;(a^\dagger + a) \\ P = i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}\;(a^\dagger - a) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \langle\, n\,|\, X\,|\, n\,\rangle = 0 \\ \langle\, n\,|\, P\,|\, n\,\rangle = 0 \end{cases} \quad \text{pues} \quad \begin{cases} \langle\, n\,|\, a\,|\, n\,\rangle = 0 \\ \langle\, n\,|\, a^\dagger\,|\, n\,\rangle = 0 \end{cases}$$

② El valor de expectación de X^2 y P^2 :

$$\begin{cases} X^2 = \frac{\hbar}{2m\omega}(a^\dagger + a\,)(a^\dagger + a\,) = \frac{\hbar}{2m\omega}\left(a^{\dagger 2} + a^\dagger a + a\, a^\dagger + a^2\right) \\ P^2 = -\frac{m\omega\hbar}{2}(a^\dagger - a\,)(a^\dagger - a\,) = -\frac{m\omega\hbar}{2}\left(a^{\dagger 2} - a^\dagger a - a\, a^\dagger + a^2\right) \end{cases}$$

Propiedades de la base $\{|\, n\,\rangle\}$

① El cálculo del valor de expectación de X y P en $\{|\, n\,\rangle\}$ es inmediato :

$$\begin{cases} X = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\ (a^\dagger + a) \\ P = i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}\ (a^\dagger - a) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \langle\, n\,|\, X\,|\, n\,\rangle = 0 \\ \langle\, n\,|\, P\,|\, n\,\rangle = 0 \end{cases} \quad \text{pues} \quad \begin{cases} \langle\, n\,|\, a\,|\, n\,\rangle = 0 \\ \langle\, n\,|\, a^\dagger\,|\, n\,\rangle = 0 \end{cases}$$

② El valor de expectación de X^2 y P^2 :

$$\begin{cases} X^2 = \frac{\hbar}{2m\omega}(a^\dagger + a)(a^\dagger + a) = \frac{\hbar}{2m\omega}\left(a^{\dagger 2} + a^\dagger a + a\, a^\dagger + a^2\right) \\ P^2 = -\frac{m\omega\hbar}{2}(a^\dagger - a)(a^\dagger - a) = -\frac{m\omega\hbar}{2}\left(a^{\dagger 2} - a^\dagger a - a\, a^\dagger + a^2\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \langle\, n\,|\, X^2\,|\, n\,\rangle = \frac{\hbar}{2m\omega}\ \langle\, n\,|\,(+a^\dagger a + a\, a^\dagger + 1)\,|\, n\,\rangle \\ \langle\, n\,|\, P^2\,|\, n\,\rangle = -\frac{m\omega\hbar}{2}\ \langle\, n\,|\,(-a^\dagger a - a\, a^\dagger - 1)\,|\, n\,\rangle \end{cases} \qquad \begin{cases} \langle\, n\,|\, X^2\,|\, n\,\rangle = \frac{\hbar}{m\omega}\left(n + \frac{1}{2}\right) \\ \langle\, n\,|\, P^2\,|\, n\,\rangle = m\omega\hbar\left(n + \frac{1}{2}\right) \end{cases}$$

Propiedades de la base $\{|\,n\,\rangle\}$

① El cálculo del valor de expectación de X y P en $\{|\,n\,\rangle\}$ es inmediato :

$$\begin{cases} X = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\;(a^\dagger + a) \\ P = i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}\;(a^\dagger - a) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \langle\, n\,|\,X\,|\,n\,\rangle = 0 \\ \langle\, n\,|\,P\,|\,n\,\rangle = 0 \end{cases} \quad \text{pues} \quad \begin{cases} \langle\, n\,|\,a\,|\,n\,\rangle = 0 \\ \langle\, n\,|\,a^\dagger\,|\,n\,\rangle = 0 \end{cases}$$

② El valor de expectación de X^2 y P^2 :

$$\begin{cases} X^2 = \frac{\hbar}{2m\omega}(a^\dagger + a)(a^\dagger + a) = \frac{\hbar}{2m\omega}\left(a^{\dagger 2} + a^\dagger a + a\,a^\dagger + a^2\right) \\ P^2 = -\frac{m\omega\hbar}{2}(a^\dagger - a)(a^\dagger - a) = -\frac{m\omega\hbar}{2}\left(a^{\dagger 2} - a^\dagger a - a\,a^\dagger + a^2\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \langle\, n\,|\,X^2\,|\,n\,\rangle = \frac{\hbar}{2m\omega}\;\langle\, n\,|\,(+a^\dagger a + a\,a^\dagger + 1)\,|\,n\,\rangle \\ \langle\, n\,|\,P^2\,|\,n\,\rangle = -\frac{m\omega\hbar}{2}\;\langle\, n\,|\,(-a^\dagger a - a\,a^\dagger - 1)\,|\,n\,\rangle \end{cases} \qquad \begin{cases} \langle\, n\,|\,X^2\,|\,n\,\rangle = \frac{\hbar}{m\omega}\;\left(n + \frac{1}{2}\right) \\ \langle\, n\,|\,P^2\,|\,n\,\rangle = m\omega\hbar\left(n + \frac{1}{2}\right) \end{cases}$$

③ La relación de incerteza:

$$\begin{cases} \Delta X = \sqrt{\langle X^2\rangle - \langle X\rangle^2} = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}\;(n + \frac{1}{2})} \\ \Delta P = \sqrt{\langle P^2\rangle - \langle P\rangle^2} = \sqrt{m\omega\hbar\,(n + \frac{1}{2})} \end{cases} \Rightarrow \qquad \Delta X\,\Delta P = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar$$

Autofunciones de H en la base $\{|\,x\,\rangle\}$

El estado fundamental :

$$a\,|\,0\,\rangle = 0 \;\;\Rightarrow\;\; \left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\,X + i\,\sqrt{\frac{1}{m\omega\hbar}}\,P\right)|\,0\,\rangle = 0 \;\;\Rightarrow\;\; \left(X + \frac{i}{m\omega}\,P\right)|\,0\,\rangle = 0$$

En la base $\{|\,x\,\rangle\}$:

$$\left(x + \frac{i}{m\omega}\,(\text{-}i\hbar)\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)\varphi_0(x) = 0 \;\;\Rightarrow\;\; \frac{\mathrm{d}\varphi_0}{\mathrm{d}x} = -\left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)x\,\varphi_0 \;\;\Rightarrow\;\; \varphi_0(x) = c\,e^{-\frac{1}{2}\frac{m\omega}{\hbar}x^2}$$

Normalizando $\int |\varphi_o|^2\,\mathrm{d}x = 1 \quad\Longrightarrow\quad \boxed{\varphi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-\frac{1}{2}\frac{m\omega}{\hbar}x^2}}$

Autofunciones de H en la base $\{|\,x\,\rangle\}$

El estado fundamental :

$$a\,|\,0\,\rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(\sqrt{\tfrac{m\omega}{\hbar}}\,X + i\,\sqrt{\tfrac{1}{m\omega\hbar}}\,P\right)|\,0\,\rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(X + \tfrac{i}{m\omega}\,P\right)|\,0\,\rangle = 0$$

En la base $\{|\,x\,\rangle\}$:

$$\left(x + \tfrac{i}{m\omega}\,(\text{-}i\hbar)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)\varphi_0(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}\varphi_0}{\mathrm{d}x} = -\left(\tfrac{m\omega}{\hbar}\right)x\,\varphi_0 \quad \Rightarrow \quad \varphi_0(x) = c\,e^{-\frac{1}{2}\,\frac{m\omega}{\hbar}x^2}$$

Normalizando $\int |\varphi_o|^2\,\mathrm{d}x = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{\varphi_0(x) = \left(\tfrac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-\frac{1}{2}\,\frac{m\omega}{\hbar}x^2}}$

Para hallar el n-ésimo nivel excitado :

$$a^{\dagger 3}|\,0\,\rangle = a^{\dagger 2}|\,1\,\rangle = a^{\dagger}\sqrt{2}\,|\,2\,\rangle = \sqrt{3!}\,|\,3\,\rangle \quad \Rightarrow \quad a^{\dagger n}\,|\,0\,\rangle = \sqrt{n!}\,|\,n\,\rangle \quad \Rightarrow \quad |\,n\,\rangle = \tfrac{1}{\sqrt{n!}}\,a^{\dagger n}|\,0\,\rangle$$

Autofunciones de H en la base $\{|\, x\,\rangle\}$

El estado fundamental :

$$a\,|\,0\,\rangle = 0 \quad\Rightarrow\quad \left(\sqrt{\tfrac{m\omega}{\hbar}}\,X + i\,\sqrt{\tfrac{1}{m\omega\hbar}}\,P\right)|\,0\,\rangle = 0 \quad\Rightarrow\quad \left(X + \tfrac{i}{m\omega}\,P\right)|\,0\,\rangle = 0$$

En la base $\{|\, x\,\rangle\}$:

$$\left(x + \tfrac{i}{m\omega}\,(\text{-}i\hbar)\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)\varphi_0(x) = 0 \quad\Rightarrow\quad \frac{\mathrm{d}\varphi_0}{\mathrm{d}x} = -\left(\tfrac{m\omega}{\hbar}\right)x\,\varphi_0 \quad\Rightarrow\quad \varphi_0(x) = c\,e^{-\frac{1}{2}\,\frac{m\omega}{\hbar}\,x^2}$$

Normalizando $\int |\varphi_o|^2\,\mathrm{d}x = 1 \qquad\Longrightarrow\qquad \boxed{\varphi_0(x) = \left(\tfrac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-\frac{1}{2}\,\frac{m\omega}{\hbar}\,x^2}}$

Para hallar el n-ésimo nivel excitado :

$$a^{\dagger 3}|\,0\,\rangle = a^{\dagger 2}|\,1\,\rangle = a^{\dagger}\sqrt{2}\,|\,2\,\rangle = \sqrt{3!}\,|\,3\,\rangle \quad\Rightarrow\quad a^{\dagger n}\,|\,0\,\rangle = \sqrt{n!}\,|\,n\,\rangle \quad\Rightarrow\quad |\,n\,\rangle = \tfrac{1}{\sqrt{n!}}\,a^{\dagger n}|\,0\,\rangle$$

$$\left.\begin{aligned} \varphi_n(x) &= \tfrac{1}{\sqrt{n!}}\,\langle\, x\,|\,a^{\dagger n}|\,0\,\rangle \\ a^{\dagger} &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}\left[\sqrt{\tfrac{m\omega}{\hbar}}X - i\sqrt{\tfrac{1}{m\omega\hbar}}P\right] \end{aligned}\right\} \boxed{\varphi_n(x) = \tfrac{1}{\sqrt{n!}}\,\left(\tfrac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\left[\sqrt{\tfrac{m\omega}{\hbar}}\,x - \sqrt{\tfrac{\hbar}{m\omega}}\,\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right]^n e^{-\frac{1}{2}\,\frac{m\omega}{\hbar}\,x^2}}$$