

Física Teórica 2

Primer cuatrimestre de 2018

Guía 5: Rotaciones y Momento Angular

1. Sea $\mathbf{J} = (J_x, J_y, J_z)$ un operador de momento angular cualquiera, es decir que sus componentes satisfacen las relaciones de conmutación $[J_i, J_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}J_k$.

a) Se definen los operadores de subida y bajada en la forma $J_+ = J_x + iJ_y$ y $J_- = J_x - iJ_y$. Demostrar las siguientes propiedades

$$\begin{aligned} [J^2, J_i] &= 0, \\ [J_+, J_-] &= 2\hbar J_z, \quad [J_z, J_+] = \hbar J_+, \quad [J_z, J_-] = -\hbar J_-, \\ J_+ J_- &= J^2 - J_z^2 + \hbar J_z, \\ J_- J_+ &= J^2 - J_z^2 - \hbar J_z. \end{aligned}$$

b) Sea $\{|j, m\rangle\}$ la base de autoestados simultáneos de J^2 y J_z , es decir que $J^2 |j, m\rangle = \hbar^2 j(j+1) |j, m\rangle$ y $J_z |j, m\rangle = \hbar m |j, m\rangle$. Demostrar las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned} J_\pm |j, m\rangle &= \hbar \sqrt{j(j+1) - m(m \pm 1)} |j, m \pm 1\rangle \\ J_\pm |j, \pm j\rangle &= 0. \end{aligned}$$

2. Muestre que cualquier autoestado de J_z satisface $\langle J_x \rangle = \langle J_y \rangle = 0$, y que si en cierto estado $|\psi\rangle$ se satisface $J_z |\psi\rangle = \hbar m |\psi\rangle$, entonces sobre ese estado el valor medio de la proyección del impulso angular \mathbf{J} sobre una dirección $\hat{\mathbf{n}}$ que forma un ángulo θ con el eje x es $\langle \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} \rangle = \hbar m \cos \theta$. Interprete el resultado.

3. Considere un sistema de espín 1/2, es decir $j = 1/2$.

a) Muestre que si definimos los operadores $S_i = \frac{\hbar}{2} \sigma_i$, donde σ_i son las matrices de Pauli, entonces $\{S_i\}_{i=x,y,z}$ son los operadores de momento angular.

b) Usando las propiedades de conmutación y anticonmutación de las matrices de Pauli, pruebe la identidad

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{a})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + i\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}),$$

donde \mathbf{a} y \mathbf{b} son dos vectores complejos en tres dimensiones. (Ayuda: recuerde que $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})_i = \sum_{ijk} \epsilon_{ijk} a_j b_k$ y que todo producto de dos operadores se puede reescribir como $AB = ([A, B] + \{A, B\})/2$).

c) Usando (a), muestre que el operador rotación para un sistema de espín 1/2 en la base $\{|+\rangle \equiv |j = 1/2, m = 1/2\rangle, |-\rangle \equiv |j = 1/2, m = -1/2\rangle\}$ se puede escribir como

$$\mathcal{D}(\hat{\mathbf{n}}, \phi) = \exp\left(-i \frac{\mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{n}} \phi}{\hbar}\right) = \mathbb{I} \cos \frac{\phi}{2} - i\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}} \sin \frac{\phi}{2},$$

donde \mathbb{I} es la matriz identidad.

d) Escriba explícitamente la matriz de 2×2 que representa la rotación $\mathcal{D}(\mathbf{n}, \phi)$.

e) Sea \mathbf{n} el versor definido por los ángulos polares α y β según se muestra en la figura 1. Aplique al ket $|+\rangle$ el operador de rotación adecuado para obtener el estado $|\mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{n}}, +\rangle$, que representa un espín orientado según $\hat{\mathbf{n}}$. Compare el resultado con el obtenido en el problema 9 de la guía 1.

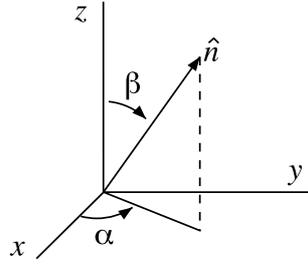


Figura 1: Definición vector \hat{n} .

4. Considere un estado arbitrario $|\alpha\rangle$ de un sistema de espín $1/2$, sobre el que se aplica una rotación en un ángulo φ alrededor del eje z ,

$$|\alpha\rangle_R = \exp\left(-i\frac{S_z\varphi}{\hbar}\right)|\alpha\rangle.$$

- a) Calcule $\langle S_x \rangle_R$, $\langle S_y \rangle_R$ y $\langle S_z \rangle_R$ en el sistema rotado, en función de los valores de expectación $\langle S_x \rangle$, $\langle S_y \rangle$ y $\langle S_z \rangle$ en el sistema original.
- b) Muestre que para una rotación de 2π en φ se satisface

$$|\alpha\rangle_R = -|\alpha\rangle.$$

Observe que no se obtiene el mismo estado debido a un factor de fase. ¿Puede observarse este efecto? Vea *Phys. Rev. Lett* **35**, 1053 (1975), o *Phys. Today*, Dic. 1980, pág. 24.

5. Considere la secuencia de rotaciones de Euler de un sistema de espín $1/2$ representada por

$$\mathcal{D}^{(1/2)}(\alpha, \beta, \gamma) = \mathcal{D}(\hat{z}, \alpha)\mathcal{D}(\hat{y}, \beta)\mathcal{D}(\hat{z}, \gamma).$$

- a) Muestre que la matriz de 2×2 que representa esta rotación es

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^{(1/2)}(\alpha, \beta, \gamma) &= \exp\left(-i\frac{\sigma_z\alpha}{2}\right) \exp\left(-i\frac{\sigma_y\beta}{2}\right) \exp\left(-i\frac{\sigma_z\gamma}{2}\right) \\ &= \begin{pmatrix} e^{-i(\alpha+\gamma)/2} \cos \frac{\beta}{2} & -e^{-i(\alpha-\gamma)/2} \sin \frac{\beta}{2} \\ e^{i(\alpha-\gamma)/2} \sin \frac{\beta}{2} & e^{i(\alpha+\gamma)/2} \cos \frac{\beta}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

- b) Debido a las propiedades del grupo de las rotaciones, esperamos que esta secuencia de operaciones sea equivalente a una única rotación alrededor de algún eje con ángulo θ . Encuentre θ y la dirección de dicho eje.

6. Considere una partícula de espín 1. Evalúe los elementos de matriz de $S_z(S_z + \hbar)(S_z - \hbar)$ y de $S_x(S_x + \hbar)(S_x - \hbar)$ sin usar la representación matricial de S_x .

7. Construya, por aplicación de los operadores de subida y de bajada, las matrices que representan a los operadores L^2 , L_x , L_y , y L_z en el subespacio generado por la base $\{|1, 1\rangle, |1, 0\rangle, |1, -1\rangle\}$ de autoestados de L^2 y L_z . Verifique explícitamente multiplicando las matrices la relación $[J_x, J_y] = i\hbar J_z$.

- a) Encuentre la base $\{|l, m_y\rangle\}$ de autoestados de L^2 y L_y de dicho subespacio. Escríbala como combinación lineal de los $|l, m\rangle$.

b) Sea un estado descrito por el vector

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1, 1\rangle - |1, -1\rangle).$$

Si se mide L_x , ¿qué valores pueden obtenerse y con qué probabilidades? Repita el cálculo si se mide L_y .

c) Sobre el estado $|\psi\rangle$ se mide L_z y se obtiene \hbar , e inmediatamente después se mide L_y . ¿Qué valores pueden obtenerse y con qué probabilidades?

8. a) Considere un sistema con $j = 1$. Escriba explícitamente

$$\langle j = 1, m' | J_y | j = 1, m \rangle$$

como matriz de 3×3 .

b) Muestre que en el caso particular $j = 1$, es legítimo reemplazar $e^{iJ_y\beta/\hbar}$ por

$$1 - i \left(\frac{J_y}{\hbar} \right) \sin \beta - \left(\frac{J_y}{\hbar} \right)^2 (1 - \cos \beta).$$

c) Usando (b) obtenga

$$d^{(j=1)}(\beta) = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{2}\right) (1 + \cos \beta) & -\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \sin \beta & \left(\frac{1}{2}\right) (1 - \cos \beta) \\ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \sin \beta & \cos \beta & -\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \sin \beta \\ \left(\frac{1}{2}\right) (1 - \cos \beta) & \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \sin \beta & \left(\frac{1}{2}\right) (1 + \cos \beta) \end{pmatrix}.$$

9. ¿Cuál es el significado de la ecuación $U^{-1}A_kU = \sum R_{kl}A_l$, donde las tres componentes de A son matrices? A partir de esta ecuación, muestre que los elementos de matriz $\langle m | A_k | n \rangle$ se transforman como vectores.

10. Un autoestado de momento angular $|j, j\rangle$ se rota en un ángulo infinitesimal ϵ alrededor del eje y . Sin usar explícitamente la forma de la función $d_{m'm}^{(j)}$, obtenga una expresión para la probabilidad de que el nuevo estado rotado se encuentre en el estado original, hasta términos de orden ϵ^2 .

11. Muestre que las matrices de 3×3 , G_i ($i = 1, 2, 3$), cuyos elementos están dados por $(G_i)_{jk} = -i\hbar\epsilon_{ijk}$, donde j y k son índices de fila y de columna, satisfacen las relaciones de conmutación del momento angular. ¿Cuál es el significado físico (o geométrico) de la transformación matricial que conecta a G_i con las representaciones de 3×3 más usuales del operador de momento angular J_i , con J_z diagonal? Relacione su resultado con la transformación

$$\mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V} + \hat{\mathbf{n}} \delta\phi \times \mathbf{V},$$

bajo rotaciones infinitesimales. (Ayuda: La siguiente identidad puede ser útil: $\sum_i \epsilon_{ijk}\epsilon_{irs} = \delta_{jr}\delta_{ks} - \delta_{js}\delta_{kr}$).

12. Considere el hamiltoniano de un rotor rígido

$$H = \frac{1}{2} \left(\frac{K_1^2}{I_1} + \frac{K_2^2}{I_2} + \frac{K_3^2}{I_3} \right)$$

donde \mathbf{K} es el impulso angular en el sistema de coordenadas fijo al cuerpo. A partir de esta expresión obtenga la ecuación de movimiento de Heisenberg para \mathbf{K} y luego halle las ecuaciones de movimiento de Euler en el límite correspondiente.

13. Construya los armónicos esféricos $Y_{1,m}$. Para ello, resuelva primero $L_+ Y_{1,1} = 0$ (L_+ en la representación r) y aplique luego el operador L_- a $Y_{1,1}$ (previamente normalizado) para hallar los otros dos restantes. Usando los resultados del problema 7, escriba la combinación lineal de estos que es autoestado de L_y con autovalor \hbar . Verifique su resultado aplicándole L_y en la representación r .

14. Suponga que fuera posible un valor semi-entero de l , por ejemplo $1/2$, para el impulso angular orbital. A partir de

$$L_+ Y_{1/2,1/2}(\theta, \phi) = 0$$

podemos deducir, como de costumbre

$$Y_{1/2,1/2}(\theta, \phi) \propto e^{i\phi/2} \sqrt{\sin \theta}.$$

Intente construir entonces $Y_{1/2,-1/2}(\theta, \phi)$ de dos maneras diferentes:

- aplicando L_- a $Y_{1/2,1/2}(\theta, \phi)$,
- usando que $L_- Y_{1/2,-1/2}(\theta, \phi) = 0$.

Muestre que los dos procedimientos llevan a resultados contradictorios (esto da un argumento en contra de valores semi-enteros de l).

15. Considere un autoestado de impulso angular orbital $|l = 2, m = 0\rangle$. Suponga que este estado es rotado en un ángulo β alrededor del eje y . Encuentre la probabilidad de que el nuevo estado se encuentre en $m = 0, \pm 1$, y ± 2 .

16. La función de onda de una partícula sujeta a un potencial esféricamente simétrico $V(r)$ está dada por:

$$\Psi(x) = (x + y + 3z) f(r).$$

- ¿Es Ψ autofunción de L^2 ? Si es así, ¿cuál es el valor de l ? Si no es así, ¿cuáles son los posibles valores de l que pueden ser obtenidos cuando se mide L^2 ?
 - ¿Cuáles son las probabilidades de hallar a la partícula en los distintos estados con m definido?
 - Suponga que se conoce de alguna manera que $\Psi(x)$ es una autofunción de energía con autovalor E . Indique cómo puede hallarse $V(r)$.
17. Usando coordenadas esféricas, obtenga una expresión para la corriente de probabilidad \mathbf{j} para el estado fundamental y los excitados del átomo de hidrógeno. Muestre en particular que, para los estados con $m \neq 0$, existe un flujo toroidal en el sentido de que \mathbf{j} está en la dirección de ϕ creciente o decreciente dependiendo del signo de m .

18. Considere un oscilador armónico tridimensional isótropo, cuyo Hamiltoniano es

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} r^2,$$

donde $p^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2$ y $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

- Resuelva la ecuación de Schrödinger en coordenadas cartesianas suponiendo conocidas las soluciones en una dimensión. Encuentre los niveles de energía y las funciones de onda. Discuta la paridad y encuentre la degeneración.

b) Ahora, en cambio, resuelva en coordenadas esféricas. La ecuación radial se puede resolver usando la sustitución $r^2 = x$. Multiplicando las funciones de onda por $x^{3/4}$ el problema se reduce al del átomo de hidrógeno cuya solución se supone conocida. Encuentre los niveles de energía y discuta la paridad y la degeneración. Compare el resultado con (a). ¿De qué conjunto completo de operadores son autoestados estas soluciones?

19. Para una partícula sometida a un potencial de oscilador armónico tridimensional isótropo (suponga que todos los parámetros de longitud y energía valen 1) considere el estado definido por

$$\psi(x, y, z) = C(1 + x + y) \exp\left(-\frac{r^2}{2}\right), \quad C = \frac{1}{\pi^{3/4}\sqrt{2}}.$$

Calcule qué valores pueden medirse y con qué probabilidad de las siguientes magnitudes: L^2 , L_z , L_x , y H .