

Física Teórica 2

Primer cuatrimestre de 2018

Guía 6: Suma de Momento Angular y teorema de Wigner–Eckart

1. Considere una partícula de espín $1/2$ en un estado con momento angular orbital $l = 1$.
 - a) Encuentre el estado con j_{max} y $m_{j_{max}}$ en términos de los estados $|l, s, m_l, m_s\rangle$.
 - b) Use $J_- = L_- + S_-$ para generar todos los estados $|j_{max}, m\rangle$.
 - c) Use ortonormalidad para encontrar el estado $|j_{max} - 1, j_{max} - 1\rangle$.
 - d) Use J_- para generar todos los estados $|j_{max} - 1, m\rangle$.
 - e) ¿Cuál es el valor de expectación de L_z en el estado con $j = 1/2$ y $m = 1/2$? ¿Cuál es el valor de expectación de S_z en ese estado?

2. Considere un sistema con dos grados de libertad correspondientes a momentos angulares j_1 y j_2 .

- a) Partiendo de $\langle j_1, j_2, m_1, m_2 | J_{\pm} | j, m \rangle$ demuestre la relación de recurrencia

$$\begin{aligned} & \sqrt{j(j+1) - m(m \pm 1)} \langle j_1, j_2, m_1, m_2 | j, m \pm 1 \rangle = \\ & \sqrt{j_1(j_1 + 1) - m_1(m_1 \mp 1)} \langle j_1, j_2, m_1 \mp 1, m_2 | j, m \rangle + \\ & \sqrt{j_2(j_2 + 1) - m_2(m_2 \mp 1)} \langle j_1, j_2, m_1, m_2 \mp 1 | j, m \rangle \end{aligned}$$

- b) Para el caso de momentos angulares $j_1 = 1$ y $j_2 = 1$, usando las relaciones de recurrencia, exprese todos los autoestados $\{|j, m\rangle\}$ (nueve) en términos de los $\{|j_1, j_2, m_1, m_2\rangle\}$.

3. Considere dos partículas con espín $1/2$. Calcule todos los coeficientes de Clebsch-Gordan por dos caminos diferentes:

- a) Escriba los kets correspondientes a los posibles estados de espín en la base de autoestados de S^2 y S_z total (triplete y singlete)

$$|s = 1, m = 1\rangle, \quad |s = 1, m = -1\rangle, \quad |s = 1, m = 0\rangle, \quad |s = 0, m = 0\rangle,$$

en función de los kets en la representación $\{|s_1 = 1/2, s_2 = 1/2, m_1, m_2\rangle\}$, usando los operadores S_{\pm} y ortogonalidad.

- b) Escriba la matriz de 4×4 que corresponde a la representación del operador

$$S^2 = S_1^2 + S_2^2 + 2\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2$$

en la base $\{|s_1 = 1/2, s_2 = 1/2, m_1, m_2\rangle\}$. Luego encuentre la matriz unitaria que diagonaliza esta matriz. ¿Puede identificar sus elementos?

4. Muestre que la función de onda de un estado con $j = 1$ formado mediante el acoplamiento de dos partículas con espín 0 provenientes de orbitales p (momento angular orbital $l = 1$), resulta antisimétrica en las coordenadas de las partículas.
5. Incluyendo el acoplamiento espín-órbita, el Hamiltoniano electrónico para el átomo de hidrógeno sin campos externos es

$$H = H_0 + \frac{2\mu_B^2}{r^3} \frac{\mathbf{L} \cdot \mathbf{S}}{\hbar^2},$$

donde $H_0 = p^2/2m - e^2/r$, y \mathbf{S} representa el espín del electrón.

a) Evalúe los conmutadores

$$[H, L^2], [H, S^2], [H, J^2], [H, L_z], [H, S_z], [H, J_z],$$

donde $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$. ¿Cuál es el conjunto más grande de estos operadores (incluyendo H) que conmutan mutuamente?

b) Ahora se enciende un campo magnético externo $\mathbf{B} = B\hat{z}$, de modo que se agrega al Hamiltoniano el término

$$H_B = \frac{\mu_B}{\hbar} B (L_z + 2S_z).$$

Para este caso, repita el punto (a).

6. Considere una partícula de espín 1/2 y masa m , que está sometida a un potencial tipo oscilador armónico tridimensional isótropo

$$V(\mathbf{r}) = \frac{m\omega^2 r^2}{2},$$

al que se le añade un potencial de interacción espín-órbita $\gamma \mathbf{L} \cdot \mathbf{S}$, donde \mathbf{L} es el momento angular orbital y \mathbf{S} el espín de la partícula. El Hamiltoniano total está dado entonces por

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 r^2}{2} + \gamma \mathbf{L} \cdot \mathbf{S}.$$

a) Halle exactamente las energías y autoestados de H correspondientes al nivel fundamental y al primer excitado.

b) Si a $t = 0$ el sistema está en el estado $|\varphi\rangle = |N = 1, L_z = \hbar, S_z = \hbar/2\rangle$, halle el estado en función del tiempo, $|\varphi(t)\rangle$. Si a $t = 0$ se mide la energía, ¿qué resultado se obtiene? ¿Y si se mide L^2 o L_z ? ¿Qué ocurre si las mediciones se realizan a $t > 0$?

c) Repite el ítem anterior pero para el estado a $t = 0$ dado por $|\psi\rangle = |N = 1, L_z = -\hbar, S_z = \hbar/2\rangle$.

7. a) Evalúe

$$\sum_{m=-j}^j \left| d_{m,m'}^{(j)}(\beta) \right|^2 m,$$

para cualquier j (entero o semi-entero). Verifique su respuesta para $j = 1/2$.

b) Pruebe que para cualquier j

$$\sum_{m=-j}^j m^2 \left| d_{m,m'}^{(j)}(\beta) \right|^2 = \frac{1}{2} j(j+1) \sin^2 \beta + m'^2 \frac{1}{2} (3 \cos^2 \beta - 1).$$

(Ayuda: Esto puede ser probado de muchas maneras. Por ejemplo, puede estudiar las propiedades ante rotaciones de J_z^2 usando el lenguaje de los tensores esféricos irreducibles.)

8. Escriba $d^{(3/2)}$ a partir de $d^{(1)}$, $d^{(1/2)}$, y los coeficientes de Clebsch-Gordan.

9. Considere un sistema formado por dos partículas de espín 1/2. Un observador A se especializa en medir las componentes de espín de una de las partículas (S_{1x}, S_{1y}, S_{1z}), mientras que el observador B mide las componentes de espín de la otra partícula. Suponga que se sabe que el sistema está en un estado singlete de espín, es decir que $S_{total} = 0$.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que el observador A obtenga $S_{1z} = \hbar/2$ cuando el observador B no efectúa mediciones? Repita el cálculo para $S_{1x} = \hbar/2$.

- b) El observador B mide $S_{2z} = \hbar/2$. ¿Qué puede decir sobre el resultado de la medición de A si: (i) A mide S_{1z} , (ii) A mide S_{1x} ? Justifique su respuesta.

10. Considere un tensor esférico de rango 1 (es decir, un vector)

$$V_{\pm 1}^{(1)} = \mp \frac{V_x \pm iV_y}{\sqrt{2}}, \quad V_0^{(1)} = V_z.$$

Usando la expresión para $d^{(j=1)}$ dada en el problema 8 de la guía 6, evalúe

$$\sum_{q'} d_{qq'}^{(1)}(\beta) V_{q'}^{(1)},$$

y muestre que sus resultados son los que esperaría de las propiedades de transformación de $V_{x,y,z}$ ante rotaciones respecto del eje y .

11. Demuestre que el producto de dos tensores irreducibles $T_q^{(k)}$ y $W_p^{(h)}$, de rango k y h respectivamente, no es un tensor irreducible sino una combinación lineal de ellos. Proceda del siguiente modo: demuestre, usando las propiedades de transformación ante rotaciones, que

$$Z_m^{(j)} = \sum_{q,p} T_q^{(k)} W_p^{(h)} \langle kh, qp | jm \rangle$$

es un tensor irreducible de rango j , luego invierta esta expresión utilizando la relación de completitud de los coeficientes de Clebsch-Gordan. Muestre que el producto de dos vectores \mathbf{V} y \mathbf{U} se puede escribir como la suma de un escalar, otro vector y un tensor esférico de rango 2. Escriba explícitamente las componentes del vector y el tensor esférico de rango 2 en términos de las componentes $U_{x,y,z}$ y $V_{x,y,z}$. En particular, si $\mathbf{V} = \mathbf{U} = \mathbf{R}$ es el operador posición, muestre que el tensor de rango 2 que se obtiene es, a menos de un factor, el operador momento cuadrupolar eléctrico.

12. a) Considere una partícula sin espín ligada a un centro fijo mediante de un potencial central. Relacione lo más posible los elementos de matriz

$$\left\langle n', l', m' \left| \frac{1}{\sqrt{2}}(x + iy) \right| n, l, m \right\rangle \text{ y } \langle n', l', m' | z | n, l, m \rangle,$$

utilizando únicamente el teorema de Wigner-Eckart. Está seguro de establecer correctamente qué elementos de matriz son no nulos.

- b) Repita el punto (a) usando funciones de onda $\Phi(x) = R_{nl}(r)Y_l^m(\theta, \phi)$.

13. a) Escriba xy , xz , y $(x^2 - y^2)$ como componentes de un tensor esférico (irreducible) de rango 2.

- b) El valor de expectación

$$Q = e \langle \alpha, j, m = j | (3z^2 - r^2) | \alpha, j, m = j \rangle$$

es conocido como el momento cuadrupolar. Evalúe

$$e \langle \alpha, j, m' | (x^2 - y^2) | \alpha, j, m = j \rangle,$$

(donde $m' = j, j - 1, j - 2, \dots$) en función de Q y los coeficientes de Clebsch-Gordan apropiados.

14. El tensor cuadrupolar de un sistema se define como

$$Q_{ik} = e (3x_i x_k - \delta_{ik} r^2).$$

Si el sistema está en un estado con un valor de impulso angular total j , el momento cuadrupolar definido en el ejercicio anterior corresponde al valor de expectación de Q_{zz} en el estado con $m = j$. Evalúe los valores de expectación restantes sobre los estados $|\alpha, j, m = j\rangle$. Interprete el resultado.

15. Probar que un núcleo atómico de espín 0 o 1/2 tiene momento cuadrupolar eléctrico nulo (el espín de un núcleo es el momento angular resultante de los espines y momentos angulares relativos de los nucleones constituyentes).
16. Un núcleo de espín 3/2 situado en el origen es sometido a un campo eléctrico inhomogéneo. La interacción eléctrica cuadrupolar básica se puede tomar como:

$$H_{int} = \frac{eQ}{2s(s-1)\hbar^2} \left[\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial 2} \right)_0 S_x^2 + \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial 2} \right)_0 S_y^2 + \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial 2} \right)_0 S_z^2 \right],$$

donde ϕ es el potencial electrostático que satisface la ecuación de Laplace, y los ejes de coordenadas se eligen de manera que

$$\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \right)_0 = \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial y} \right)_0 = \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z} \right)_0 = 0.$$

Muestre que la energía de interacción puede ser escrita como

$$A(3S_z^2 - S^2) + B(S_+^2 + S_-^2),$$

y exprese A y B en función de $\partial^2 \phi / \partial x^2$ y demás derivadas parciales. Determine los autoestados de energía (en términos de $|m\rangle$, donde $m = \pm 3/2, \pm 1/2$) y los correspondientes autovalores. ¿Hay alguna degeneración?

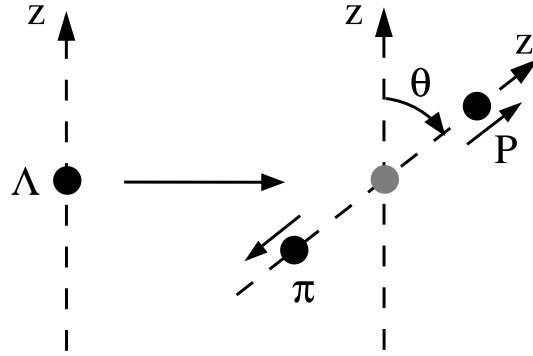
17. La partícula Y se forma en la colisión $A + B \rightarrow Y$, y luego decae según la reacción $Y \rightarrow C + D$. Los espines de A , B , C y D son cero. En este ejercicio queremos estudiar que restricciones impone a este proceso la conservación del impulso angular.

Elijamos como referencia el sistema centro de masa de AB . Llamemos \hat{z} a la dirección de los haces colisionantes (A y B) y \hat{z}' a un eje que forma un ángulo θ con \hat{z} . Denotemos con $|CD, z'\rangle$ al ket que describe las partículas C y D moviéndose como ondas planas en sentidos opuestos según la dirección \hat{z}' . Mostremos que conservación de \vec{J} permite predecir la distribución angular con la que es emitida C . Para ello, demuestre las siguientes afirmaciones.

- El espín s de Y es necesariamente entero, e Y se produce en el estado $|s, 0\rangle$.
- El ket $|s, 0\rangle_z$, un autoestado $\{J^2, J_z\}$ de Y , se puede desarrollar en la base $|s, m\rangle_{z'}$ de autoestados de $\{J^2, J_{z'}\}$ como $|s, 0\rangle_z = \sum_{m=-s}^s c_m |s, m\rangle_{z'}$ con $c_m = d_{m0}^s(\theta)$.
- El elemento de matriz $a = \langle CD, z' | U_T | s, 0\rangle_{z'}$ es independiente de θ , la dirección de \hat{z}' .
- La amplitud del proceso de decaimiento es $\langle CD, z' | U_T | s, 0\rangle_z = a d_{00}^s(\theta)$.

Dibuje a mano alzada la distribución θ de C . Note que el número de mínimos es justamente s . Así, la medición de la distribución angular de C permite inferir el valor del espín de Y . Note asimismo que, en el proceso $Y \rightarrow C + D$, el impulso angular de espín del Y (su impulso angular orbital es cero pues está en reposo) se transforma en impulso angular orbital del sistema CD . Así, lo que se conserva es el impulso angular total, no el orbital y el de espín por separado.

18. La partícula lambda se desintegra en protón más pión, $\Lambda \rightarrow p\pi$, con un vida media de 10^{-12} seg. Los espines de la Λ , p , y π son $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$ y 0, respectivamente. El decaimiento ocurre por la fuerza débil, pero en este ejercicio estudiaremos que restricciones impone conservación del impulso angular total (esto es, la suma de todos los impulsos angulares orbitales y de espín), independientemente de conocer el Hamiltoniano del proceso. Como se indica en la figura, tomamos como referencia el sistema en reposo de la Λ , elegimos como eje \hat{z} la dirección en que apunta su espín ($S_z(\Lambda) = \hbar/2$), llamamos \hat{z}' al eje en que se emite el protón, y denotamos con θ al ángulo entre \hat{z} y \hat{z}' .



- Consideremos primero $\theta = 0$. Cuánto vale en este caso L_z del protón y L_z del pión? Si se mide el espín del protón según \hat{z} , que valores pueden obtenerse y con que probabilidades?
- Repita el ítem anterior para el caso $\theta = \pi$.
- Sea ahora θ arbitrario, y consideremos la medición del espín de la lambda según \hat{z}' . Usando matrices rotación calcule la probabilidad de medir $S_{z'} = \hbar/2$ o $S_{z'} = -\hbar/2$.
- A partir del resultado del ítem anterior, muestre que la dependencia en θ de la probabilidad que la lambda emita un protón con $S_{z'} = \hbar/2$ es $P(\theta) \propto \cos^2 \frac{\theta}{2}$.
- Repita el ítem anterior, pero calculando la distribución en θ para protones con $S_{z'} = -\hbar/2$.
- Llamemos c_+ y c_- a las amplitudes del proceso cuando $\theta = 0$ y $\theta = \pi$, respectivamente (estas amplitudes se podrían calcular si conociéramos H). Muestre que conservación de paridad implica $|c_+| = |c_-|$. O sea, si $|c_+| \neq |c_-|$ el decaimiento de la Λ violaría paridad.
- A partir de c_+ y c_- calcule la probabilidad de que el protón se emita a un ángulo θ , independientemente de su espín. Muestre que la emisión es isótropa si además de conservación de impulso angular se supone conservación de paridad.
- Experimentalmente la probabilidad de que el protón salga formando un ángulo θ es

$$P(\theta) \propto 1 - 0,62 \cos \theta$$

A partir de esto muestre que $|c_-/c_+| \approx 2$.

Efectivamente, paridad no resulta ser una simetría de la naturaleza.